Alexej Brodovskyy, jetzt Stufe 12, beteiligte sich im vergangenen Jahr erfolgreich am Bundeswettbewerb Mathematik. Seine Lösung der Aufgabe 2 der 1. Runde des Vorjahres wurde als Musterlösung und Werbung in das Aufgabenblatt für den Wettbewerb 2007 aufgenommen.

Lösungsbeispiel

Aufgabe 2 der 1. Runde 2006

Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, für die die Gleichung $x^3 + y^3 = 4 \cdot (x^2y + xy^2 + 1)$ gilt.

Alexej Brodovskyy
Klasse 11,
Landrat-Lucas-Gymnasium,
Leverkusen

Lösung von Alexej Brodovskyy

Die vorgegebene Gleichung kann man folgendermaßen umformen:

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$

$$x^3 + y^3 = 4x^2y + 4xy^2 + 4$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 4x^2y - 4xy^2 = 4$$

$$(x + y)\left((x + y)^2 - 3xy\right) - 4xy(x + y) = 4$$

$$(x + y)\left((x + y)^2 - 7xy\right) = 4 \qquad \textbf{(1)}$$

Angenommen, x und y sind ganze Zahlen. Dann sind auch die Terme $(x + y)$ und $\left((x + y)^2 - 7xy\right)$ ganze Zahlen. Somit kann $(x + y)$ nur die Werte $-4, -2, -1, 1, 2, 4$ annehmen. Setzen wir diese nacheinander in die Gleichung **(1)** ein, so ergeben sich für xy folgende Werte:

x + y	−4	−2	−1	1	2	4
x y	17/7	6/8	5/7	−3/7	2/7	15/7

Wie man der Tabelle entnehmen kann, ist xy in keinem der Fälle eine ganze Zahl, woraus folgt, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, die die gegebene Gleichung erfüllen, w.z.b.w.