# April 2005

Vor 85 Jahren starb Srinivasa RAMANUJAN (22.12.1887 – 26.04.1920)


„Sehr geehrter Herr, darf ich mich Ihnen vorstellen als Angestellter der Buchhaltung in der Hafenverwaltung von Madras mit einem Jahreseinkommen von £ 20. Ich bin jetzt 23 Jahre alt. Ich habe keine abgeschlossene Universitätsausbildung, habe aber den üblichen Unterricht absolviert. Nachdem ich die Universität verlassen habe, habe ich mich in der mir zur Verfügung stehenden Freizeit mit Mathematik beschäftigt. Ich habe nicht den konventionellen geregelten Weg beschritten, ... sondern ich gehe einen eigenen neuen Weg. ... Ich bitte Sie, die beigefügten Papiere durchzusehen. Da ich arm bin, möchte ich gerne meine Sätze veröffentlichen, falls Sie überzeugt sind, dass sie einen Wert haben. ...“

Diesen Brief richtete RAMANUJAN, der zweifach bei Abschlussprüfungen indischer Colleges durchgefallen war, an drei bekannte englische Mathematiker. Nur Godfrey Harold HARDY, Mathematiker an der Universität Cambridge, nahm sich die Zeit, die Liste mathematischer Formeln anzuschauen, die Ramanujan seinem Brief beigefügt hatte, und er erkannte die große mathematische Begabung des unbekannten Autors.

HARDY überredete RAMANUJAN, ein Stipendium in England anzunehmen. Aus der Zusammenarbeit beider entstand eine große Zahl von Veröffentlichungen. RAMANUJAN fühlte sich jedoch in England nicht wohl; er hatte Heimweh und vermisste die gewohnte Nahrung. Schließlich erkrankte er an Tuberkulose und kehrte – nachdem der 1. Weltkrieg beendet war - sterbenskrank in seine Heimat zurück.

| MO | DI | MI | DO | FR | SA | SO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |

RAMANUJAN war Autodidakt; seine Art, sich mit Mathematik zu beschäftigen, war durch ein Buch geprägt worden, das im Prinzip nur aus einer Sammlung wichtiger mathematischer Sätze bestand und kaum auf Begründungszusammenhänge einging. Daher sah er keine Veranlassung, die von ihm entdeckten mathematischen Sätze, Gleichungen und Formeln zu begründen, da er sie „eingesehen" hatte. Die Formeln, die er seinem Brief an HARDY beigefügt hatte, waren Auszüge aus seinen mathematischen Tagebüchern, die auch heute noch die Mathematiker beschäftigen. RAMANUJAN wird von manchen Experten als der genialste Mathematiker des 20. Jahrhunderts angesehen; seine Entdeckungen im Bereich der Zahlentheorie zeigen, dass er einen „Blick" für Eigenschaften von Zahlen hatte, die anderen verborgen blieben.

Zwei Episoden beschreiben andeutungsweise diese Fähigkeit: HARDY besuchte RAMANUJAN im Krankenhaus und berichtete dabei beiläufig, dass das von ihm benutzte Taxi die Nummer 1729 hatte – eine Zahl ohne besondere Eigenschaften, wie er (HARDY) vermutete. RAMANUJAN entgegnete: 1729 ist eine sehr interessante Zahl.

1729 ist die kleinste natürliche Zahl, die sich auf zwei Arten als Summe von Kubikzahlen darstellen lässt: $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$.

Ein andermal soll RAMANUJAN folgende Knobelaufgabe ohne zu zögern gelöst haben:

Die Häuser eines Straßendorfes stehen alle auf einer Seite. Jemand wohnt in einem Haus mit einer Hausnummer, für welche die Summe der Hausnummern vor und hinter diesem Haus gleich ist. Wie viele Häuser hat das Dorf? Welche Hausnummer ist dies?

Natürliche Zahlen, die keine Primzahlen sind, bezeichnet man als zusammengesetzte Zahlen. Betrachtet man die Folge der zusammengesetzten Zahlen, dann schwankt die Teiler-Anzahl sehr stark. Konzentriert man sich nun auf die Teilfolge derjenigen zusammengesetzten Zahlen, für welche die Anzahl der Teiler größer ist als für alle vorangegangenen Zahlen, dann besteht diese Folge aus den Zahlen 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, ... RAMANUJAN entdeckte, dass bei <u>allen</u> diesen „hochzusammengesetzten Zahlen", wenn man sie als Primzahlpotenzen schrieb, die Exponenten der Primzahlen 2, 3, 5, ... monoton abnehmen: $6 = 2^1 \cdot 3^1$, $12 = 2^2 \cdot 3^1$, $24 = 2^3 \cdot 3^1$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3^1$, $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

| Zahl | Teiler | Teiler-Anzahl | | Zahl | Teiler | Teiler-Anzahl | | Zahl | Teiler | Teiler-Anzahl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1,2,4 | 3 | | 21 | 1,3,7,21 | 4 | | 35 | 1,5,7,35 | 4 |
| 6 | 1,2,3,6 | 4 | | 22 | 1,2,11,22 | 4 | | 36 | 1,2,3,4,6,9,12,18,36 | 9 |
| 8 | 1,2,4,8 | 4 | | 24 | 1,2,3,4,6,8,12,24 | 8 | | 38 | 1,2,19,38 | 4 |
| 9 | 1,3,9 | 3 | | 25 | 1,5,25 | 3 | | 39 | 1,3,13,39 | 4 |
| 10 | 1,2,5,10 | 4 | | 26 | 1,2,13,26 | 4 | | 40 | 1,2,4,5,8,10,20,40 | 8 |
| 12 | 1,2,3,4,6,12 | 6 | | 27 | 1,3,9,27 | 4 | | 42 | 1,2,3,6,7,14,21,42 | 8 |
| 14 | 1,2,7,14 | 4 | | 28 | 1,2,4,7,14,28 | 6 | | 44 | 1,2,4,11,22,44 | 6 |
| 15 | 1,3,5,15 | 4 | | 30 | 1,2,3,5,10,15,30 | 7 | | 45 | 1,3,5,9,15,45 | 6 |
| 16 | 1,2,4,8,16 | 5 | | 32 | 1,2,4,8,16,32 | 6 | | 46 | 1,2,23,46 | 4 |
| 18 | 1,2,3,6,9,18 | 6 | | 33 | 1,3,11,33 | 4 | | 48 | 1,2,3,4,6,8,12,16,24,48 | 10 |
| 20 | 1,2,4,5,10,20 | 6 | | 34 | 1,2,17,34 | 4 | | 49 | 1,7,49 | 3 |

Es ist schwierig, auf nur drei Seiten darzustellen, in welchen mathematischen Gebieten RAMANUJAN sonst noch Entdeckungen machte. Seine Tagebücher enthalten über 3500 Eintragungen mit mathematischen Formeln und Sätzen. Die folgenden Beispiele dienen nur einem Zweck: Darüber zu staunen, was RAMANUJAN entdeckt hat!

In der Zahlentheorie wird p(n) als die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n bezeichnet; das ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine natürliche Zahl in Summanden von natürlichen Zahlen zu zerlegen (dabei wird n selbst mitgezählt).

Beispiel: p(3) = 3, da 3 = 2+1 = 1+1+1 ;   p(4) = 5, da 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1;
p(5) = 7, da 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1

Die Folge p(n) wächst stark an; z. B. gilt: p(50) = 204226. Zusammen mit HARDY entwickelte er eine Näherungsformel, um die Anzahl der Partitionen zu bestimmen.

RAMANUJAN entdeckte verschiedene Eigenschaften der Funktion p(n): Wenn die Zahl n bei der Division durch 5 den Rest 4 lässt, dann ist p(n) selbst durch 5 teilbar. Wenn n bei der Division durch 25 den Rest 24 lässt, dann ist p(n) durch 25 teilbar. Wenn n bei der Division durch 7 den Rest 5 lässt, dann ist p(n) durch 7 teilbar. Wenn n bei der Division durch 49 den Rest 47 lässt, dann ist p(n) durch 49 teilbar u.a.m.

Auch interessierte er sich für Produkte von Primzahlen ($p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, ...). Er fand heraus, dass für gewisse unendliche Produkte „einfache" Beziehungen gelten:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2+1}{p_k^2-1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{26}{24} \cdot \ldots = \frac{5}{2} \quad \text{oder} \quad \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{p_k^2}\right) = \left(1+\frac{1}{4}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{9}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{25}\right) \cdot \ldots = \frac{15}{\pi^2}$$

RAMANUJAN beschäftigte sich ebenfalls intensiv mit Kettenbrüchen – das sind Brüche, in deren Nenner wiederum Brüche stehen, die wiederum Brüche enthalten ... – und entdeckte eine Fülle von bis dahin unbekannten Zusammenhängen, z. B.

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot e}{2}}$$

RAMANUJAN fand eine unglaubliche Fülle neuer Möglichkeiten, $\pi$ zu berechnen, z.B.:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}} \qquad \frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1123+21460n)(2n-1)!!(4n-1)!!}{882^{2n+1} 32^n (n!)^3}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

Wer mehr über das Leben von Srinivasa Ramanujan erfahren möchte, dem sei die Biografie von Robert Kanigel: „Der das Unendliche kannte" empfohlen (deutsche Übersetzung: A. Beutelspacher).