

August 2005

Vor 300 Jahren starb

JAKOB BERNOULLI

(06.01.1655 - 16.08.1705)



Der Mathematiker, dessen Name auf der Schweizer Briefmarke von 1994 schlicht vergessen wurde, ist Jakob BERNOULLI. Die Familie BERNOULLI stammte ursprünglich aus Antwerpen und war 1570 wegen der blutigen Unterdrückung der protestantischen Bewegung durch den spanischen Statthalter in den Niederlanden, Herzog Alba, nach Basel emigriert.

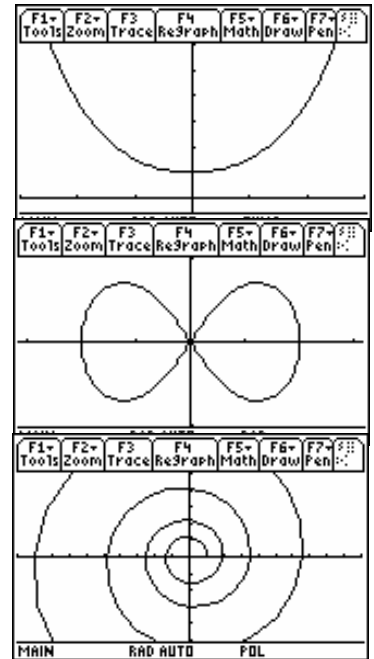
Jakob BERNOULLI, der auf ausdrücklichen Wunsch seines Vaters Theologie studierte, beschäftigte sich jedoch heimlich mit Mathematik. Mit 21 Jahren zog er als Privatlehrer durch Europa, um die Bekanntschaft mit den bedeutendsten Mathematikern und Naturforschern seiner Zeit zu machen und von ihnen zu lernen. Nach Basel zurückgekehrt, lehrte er an der Universität zunächst Experimentalphysik. Mit 32 Jahren dann konnte er dann einen Lehrstuhl für Mathematik übernehmen, gab aber weiterhin auch Vorlesungen über Theoretische Physik. Zusammen mit seinem Bruder Johann, der eigentlich Medizin studieren sollte, beschäftigte er sich als einer der Ersten seiner Zeit mit der Differentialrechnung von Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716). Zwischen Jakob und Johann BERNOULLI (1667 - 1748) bestand ein lebenslanges, manchmal in Feindschaft ausartendes Rivalitätsverhältnis. Gleichwohl wurde Johann nach dem Tod seines Bruders dessen Lehrstuhl-Nachfolger in Basel (vorher war er Mathematik-Professor in Groningen).

Aus der Familie gingen noch weitere bedeutende Wissenschaftler hervor, u. a. Johann BERNOULLIS Sohn Daniel (1700 - 1782), der als Mathematiker, Physiker und Mediziner zahlreiche Entdeckungen machte (Blutkreislauf, Impfung, medizinische Statistik, Strömungslehre) sowie der Neffe Nikolaus (1687 - 1759), der nacheinander Professuren für Mathematik, Logik und Jura inne hatte.

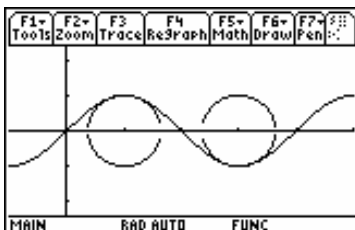
MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Wie in der damaligen Zeit üblich, forderten sich Johann und Jakob BERNOULLI durch öffentlich gestellte Probleme heraus:

- Welche Linie nimmt eine an zwei Punkten aufgehängte Kette ein? („Kettenlinie“, $f(x) = \frac{a}{2} \cdot (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$)
- Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, bei denen das Produkt der Abstände zu zwei festen Punkten konstant ist? („Lemniskate“)
- Bei welcher Kurve wird jeder vom Ursprung ausgehende Strahl unter dem gleichen Winkel geschnitten? („logarithmische Spirale“) oder
- Durch welche Kurve müssen zwei auf unterschiedlicher Höhe liegende Punkte mit einander verbunden werden, damit eine reibungsfrei gleitende Masse in kürzester Zeit beim unteren Punkt ankommt? („Brachistochrone“).



Letzteres Problem wurde außer von den beiden Brüdern nur von Isaac NEWTON, Gottfried Wilhelm LEIBNIZ und Guillaume Francois Antoine DE L'HOSPITAL gelöst. Die Brüder trugen wesentlich zur Verbreitung und zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung bei. Im 1713 ausbrechenden Prioritätenstreit zwischen LEIBNIZ und NEWTON, wer der „Erfinder“ der Differentialrechnung sei, schlug sich Johann BERNOULLI auf die Seite von LEIBNIZ.



Jakob BERNOULLI verwandte als Erster den Begriff des Integrals, den LEIBNIZ in seine Schriften übernahm. Er führte den Begriff des Krümmungskreises einer Kurve ein; deren Radius r berechnet sich wie folgt: $r = \frac{(\sqrt{1+f'(a)^2})^3}{f''(a)}$.

Darüber hinaus beschäftigte er sich mit unendlichen Reihen; als Erster zeigte er, dass die harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ über alle Schranken hinaus wächst.

Er konnte andererseits nachweisen, dass die Summe der Kehrwerte der Quadratzahlen beschränkt ist: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots < 2$, die Folge also konvergiert, allerdings ohne den Grenzwert der Reihe bestimmen zu können.



Leonhard EULER (1707 - 1783), der erst durch Vorlesungen bei Johann BERNOULLI zur Mathematik geführt worden war, gelang später der Beweis, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$.

Im Zusammenhang mit den Reihenuntersuchungen verwendete Jakob BERNOULLI für $(1+x)^n$ die Abschätzung $(1+x)^n > 1 + n \cdot x$ (falls $x > 0$), die heute als BERNOULLISCHE Ungleichung bezeichnet wird.

Aus einem Briefwechsel mit Christiaan HUYGENS (1629 - 1695) über Glücksspiele entstand eine erste umfassende Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung; das Buch „Ars conjectandi“ (Die Kunst des Vermutens) wurde von Jakob BERNOULLIS Neffe Nikolaus 1713 posthum herausgegeben. In diesem beschäftigt sich Jakob BERNOULLI mit Verallgemeinerungen des HUYGENSSchen Werkes von 1657 „De ratiociniis in ludo aleae“ (Über Berechnungen bei Glücksspielen). Weiter beschäftigt er sich systematisch mit kombinatorischen Fragen und wie man sie auf Glücksspiele anwendet. Der letzte Abschnitt enthält das „goldene Theorem“, das seit Simeon Denis POISSON auch als „BERNOULLISches Gesetz der großen Zahlen“ bezeichnet wird:



Ein Zufallsversuch werde n-mal unter gleichen Bedingungen wiederholt, die Ergebnisse sollen unabhängig vom Ergebnis der vorhergehenden Versuchsdurchführungen eintreten (so genannte BERNOULLI-Versuche). Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis A („Erfolg“) bei jeder der Versuchsdurchführungen eintritt, sei mit p bezeichnet; dann gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ für k Erfolge:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (\text{BERNOULLISCHE Formel})$$

Mit wachsender Anzahl der Versuche strebt die relative Häufigkeit X/n gegen die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ und für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (\text{BERNOULLISCHES Gesetz der großen Zahlen})$$

Das BERNOULLISCHE Gesetz der großen Zahlen ist auf der o. a. Schweizer Briefmarke in der allgemeineren Form $\frac{1}{n} \cdot (x_1 + \dots + x_n) \rightarrow E(X)$ notiert und grafisch veranschaulicht; die Folge der arithmetischen Mittel der Versuchsergebnisse x_1, \dots, x_n strebt gegen den Erwartungswert $E(X)$ der zugehörigen Zufallsgröße.

Bei seinen kombinatorischen Untersuchungen stieß Jakob BERNOULLI auf besondere Zahlen, die ihm zu Ehren als BERNOULLISCHE Zahlen B_n bezeichnet werden. Diese Zahlen treten auch bei der Reihenentwicklung der Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ an der Stelle 0

auf. Die Funktion und ihre Ableitungen sind an der Stelle 0 nicht definiert, aber dort stetig ergänzbar und es gilt:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{x^n}{n!} \quad \text{mit } B_0 = 1; B_1 = -\frac{1}{2}; B_2 = \frac{1}{6};$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}; B_6 = \frac{1}{42}; B_8 = -\frac{1}{30}; B_{10} = \frac{5}{66} \dots$$

Für die BERNOULLISCHEN Zahlen gilt die folgende Beziehung:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k = 0 \quad \text{für } n > 1. \quad \text{Die Zahlen spielen auch bei den Reihenentwicklungen von } \tan(x),$$

$\ln(\sin(x)/x)$ und $x \cdot \cot(x)$ eine Rolle.

