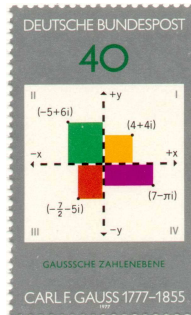


Februar 2005

Vor 150 Jahren starb Carl Friedrich GAUSS (30.04.1777 - 23.02.1855)



Satz von GAUSS (FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA):
 Jede algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten hat in der Menge der komplexen Zahlen genau n Lösungen.

Die außergewöhnliche mathematische Begabung von GAUSS wurde bereits früh erkannt. Mit 19 Jahren löste er ein Jahrtausende altes geometrisches Problem „Welche Vielecke lassen sich allein mit Zirkel und Lineal konstruieren?“ und gab für das regelmäßige 17-Eck die Konstruktion konkret an (vgl. DDR-Briefmarke).

Als 24-jähriger veröffentlichte er seine „Disquisitiones arithmeticae“ (Untersuchungen über höhere Arithmetik), in denen unter anderem der Fundamentalsatz der Algebra enthalten war. Für diesen Satz gab GAUSS im Laufe seines Lebens drei weitere Beweise an. Der Satz besagt, dass jede Gleichung n-ten Grades auch tatsächlich n Lösungen hat, die allerdings nicht unbedingt in der Menge der reellen Zahlen liegen müssen. Beispielsweise hat die einfache Gleichung $x^4 = 1$ die beiden reellen Lösungen +1 und -1, aber auch die imaginären Lösungen +i und -i, was man auch durch die Linearfaktorzerlegung $x^4 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i)$ verdeutlichen kann.

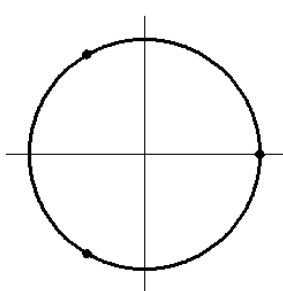
Komplexe Zahlen kann man in der Form $a + i \cdot b$ (i ist die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$) notieren und in der GAUSSschen Zahlenebene darstellen (vgl. Briefmarke der BRD)

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28						

Über den 7-jährigen Carl Friedrich GAUSS wird berichtet, dass er in kürzester Zeit mit der Rechenaufgabe $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ fertig war, die sein Lehrer der Klasse aufgetragen hatte. Sein Trick: Schreibt man die Zahlenfolge $1, 2, 3, \dots, 100$ zweimal untereinander, einmal jedoch in umgekehrter Reihenfolge, dann ist die Summe je zwei übereinander stehender Zahlen jeweils gleich 101. Die doppelte Summe der natürlicher Zahlen von 1 bis 100 ist also $100 \cdot 101 = 10100$, die gesuchte Summe also 5050.

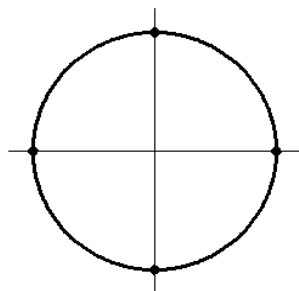
Nicht ohne Grund hat man GAUSS bereits zu Lebzeiten als „princeps mathematicorum“ (Fürst der Mathematiker) bezeichnet - die Zahl seiner mathematischen Entdeckungen ist ungeheuer groß. Er gilt als der eigentliche Begründer der Zahlentheorie, ein Gebiet der Mathematik, das sich mit Eigenschaften der natürlichen Zahlen, z. B. auch der Primzahlen, beschäftigt. Bereits mit 15 Jahren stellte er die Vermutung auf, dass die Anzahl der Primzahlen, die kleiner sind als eine natürliche Zahl x , ungefähr gleich $x/\ln(x)$ ist - ein Satz, der von ihm später auch bewiesen wurde.

Im Zusammenhang mit dem Fundamentalsatz der Algebra beschäftigte er sich mit den so genannten Kreisteilungsgleichungen, das sind Gleichungen der Form $x^n = 1$, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$. Man kann die n Lösungen einer solchen Gleichung notieren als $x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. In der GAUSSschen Zahlenebene eingezeichnet sind dies die Eckpunkte von regelmäßigen n -Ecken auf dem Einheitskreis.



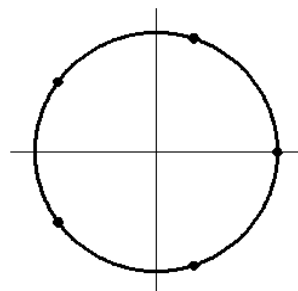
Lösungen von $x^3 = 1$

$$x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \vee x = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



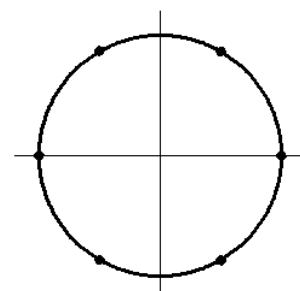
Lösungen von $x^4 = 1$

$$x = 1 \vee x = i \vee \\ x = -1 \vee x = -i$$



Lösungen von $x^5 = 1$

$$x = 1 \vee \\ x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4} \vee \\ x = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4} \vee \\ x = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4} \vee \\ x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4}$$



Lösungen von $x^6 = 1$

$$x = 1 \vee x = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \\ x = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \\ x = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \\ x = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Als GAUSSschen Algorithmus bezeichnet man eine Methode des Lösens eines linearen Gleichungssystems. So kann man beispielsweise das folgende 3×3 -Gleichungssystem schrittweise auf Dreiecksgestalt bringen und dann von unten nach oben lösen:

$$1x + 1y + 1z = +6$$

$$1x - 1y + 3z = +8$$

$$1x - 1y - 1z = -4$$

$$1x + 1y + 1z = +6$$

$$-2y + 2z = +2$$

$$-2y - 2z = -10$$

$$1x + 1y + 1z = +6$$

$$-2y + 2z = +2$$

$$-4z = -12$$

$$x = +1$$

$$y = +2$$

$$z = +3$$

Von GAUSS wurde eine Funktion in die Mathematik eingeführt, die nach ihm als GAUSS-Klammer-Funktion benannt wird; es handelt sich um die Funktion $[x]$ (in Programmiersprachen oft als INTEGER-Funktion bezeichnet), die jeder reellen Zahl x die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner oder gleich x ist.

GAUSS beschäftigte sich intensiv mit der Krümmung von Flächen im 3-dimensionalen Raum (GAUSSsche Krümmung) sowie der Flächenbestimmung von gekrümmten Flächen, die mithilfe des GAUSSschen Integralsatzes bestimmt werden können.

Bereits mit 15 Jahren erkannte GAUSS, dass eine der Grundlagen der EUKLIDischen Geometrie, das so genannte Parallelenaxiom, nicht notwendig erfüllt sein muss, d. h. dass es auch Geometrien geben kann, bei denen die Winkelsumme im Dreieck nicht gleich 180° ist - dies ist z. B. bei der Geometrie auf der Kugel der Fall. GAUSS beschäftigte sich nicht abschließend mit dieser Fragestellung, so dass der russische



Mathematiker NICOLAI IWANOWITSCH LOBATSCHIEWSKI und der Ungar JANOS BOLYAI als Entdecker der nicht-euklidischen Geometrie gelten. GAUSS soll allerdings über die Entdeckung BOLYAIS gesagt haben „Ihn zu loben, würde bedeuten, mich selbst zu loben.“ und über die Veröffentlichung LOBATSCHIEWSKIS, dass er dessen Einsichten bereits 54 Jahren früher gehabt habe.



Viele Jahre seines Lebens beschäftigte er sich mit Fragen der Vermessung, konkret führte er die Vermessung des Königreichs Hannover durch und verbesserte dabei die Methoden der Geodäsie und entwickelte geeignete Methoden zur möglichst unverzerrten Darstellung mithilfe von Kartenprojektionen („GAUSSsche Koordinaten“). Er verfasste ein Buch über die Theorie der Bewegung der Himmelskörper („Theoria motus corporum coelestium“) und überraschte die Wissenschaftswelt durch korrekte Vorhersage des Wiedererscheinens des Planetoiden Ceres. Hierzu hatte er eine mathematische Methode entwickelt, durch die Messfehler möglichst gering gehalten werden: „die Methode der kleinsten Quadrate“. Falls die zufällig auftretenden Fehler normalverteilt sind, kann man nach dieser Methode den „besten“ Näherungswert berechnen. Diese Methode verwenden wir z. B. auch, wenn wir Regressionsgeraden oder -kurven bestimmen. Die Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ wird als GAUSSsche

Dichtefunktion bezeichnet. Mithilfe dieser Funktion kann das Streuverhalten von vielen Größen u. a. aus Biologie und Technik um einen Mittelwert beschrieben werden.

GAUSS leistete auch wichtige Beiträge in der Physik: Von ihm wurde das CGS-System mit den Grundeinheiten Zentimeter (cm) - Gramm (g) und Sekunde (s) in die Wissenschaft eingeführt; wegen seiner Entdeckungen bei elektromagnetischen Erscheinungen hat man ein Phänomen als „GAUSS-EFFEKT“ nach ihm benannt und die Einheit „GAUSS“ für die magnetische Flussdichte (magnetische Induktion) definiert ($1 \text{ GAUSS} = 10^{-4} \text{ Tesla}$). Eine der Methoden zur Bestimmung des erdmagnetischen Feldes wird heute noch als GAUSSsche Methode bezeichnet. GAUSS hatte zuerst eine Professur für Astronomie an der Universität Göttingen und war Leiter der Sternwarte. Er beschäftigte sich mit der Verbesserung des Baus von Teleskopen und untersuchte, wie man möglichst fehlerfreie Optiken bauen kann.