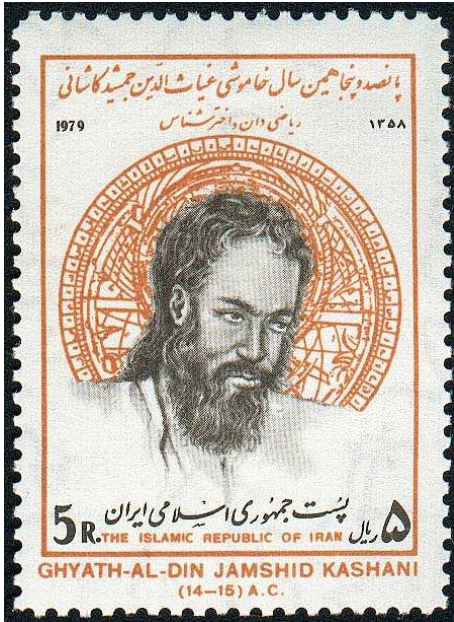


Juli 2005

Vor 625 Jahren geboren

JAMSHID AL-KASHI

(1380 - 1429)



GHYATH-AL-DIN JAMSHID AL-KASHI gilt als der letzte große Mathematiker des islamischen Mittelalters. Geboren in Kashan (im heutigen Iran), erlebte er als Kind die Eroberung der Region durch mongolische Heere unter dem Regenten Timur. Erst nach dessen Tod und der Teilung des Reiches erblühte das kulturelle und wissenschaftliche Leben wieder. Der Thronfolger Timurs, SHAK ROKH, ernannte seinen Sohn ULUGH BEG (der Name bedeutet übersetzt: „Großprinz“) zum neuen Herrscher der Hauptstadt des Landes, der berühmten Stadt Samarkand (im heutigen Usbekistan). Dieser lud AL-KASHI und viele andere Wissenschaftler ein, als Forscher und Lehrer an die neu gegründete Universität und das neu zu errichtende Observatorium zu kommen.

Als eine der größten Leistungen in der Geschichte der arabischen Mathematik gilt die Bestimmung von π in AL-KASHIS Werk „Abhandlung über den Kreis“, herausgegeben im Jahr 1424. AL-KASHI verfolgte dabei das ehrgeizige Ziel, π so genau zu bestimmen, dass der auftretende Fehler bei einem Kreis mit einem Durchmesser von 600.000 Erddurchmessern kleiner sein sollte als eine Haaresbreite (!) Die hierzu notwendigen Berechnungen führte er mit 10-stelliger Genauigkeit im Sexagesimalsystem (umgerechnet 16-stellige Genauigkeit im Dezimalsystem) an einem regelmäßigen Vieleck mit $805.306.368 = 3 \cdot 2^{28}$ Ecken durch.

AL-KASHI schrieb noch weitere Bücher, in denen er das mathematische Wissen der damaligen Zeit zusammenfasste und verallgemeinerte, z. B. gab er bereits Rechenverfahren zur Bestimmung von n-ten Wurzeln und Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen höheren Grades an.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31



AL-KASHI widmete sein mathematisches Hauptwerk seinem Fürsten ULUGH BEG (1394 - 1449); darin beschäftigte er sich mit dem Rechnen mit natürlichen Zahlen (unter Verwendung der neuen, aus Indien eingeführten Ziffernschreibweise), mit dem Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen und mit Dezimalbrüchen - in Europa erst 150 Jahre später von SIMON STEVIN (1548 - 1620) wieder entdeckt - , mit dem Rechnen im Sexagesimal-System (Basis 60), mit der Bestimmung von Flächen und Volumina u. a. von Zylinder, Kegel, Kugel, regulären Poly-



edern (platonische Körper) und halbrekulären Polyedern (archimedische Körper) sowie von anderen, in der islamischen Architektur verwendeten Formen, mit dem Problem der Irrationalität von Zahlen, mit der Summation von endlichen Zahlenfolgen sowie mit Problemen aus der Zahlentheorie, z. B. Berechnung befreundeter bzw. vollkommener Zahlen.

Erläuterung: Zwei natürliche Zahlen a und b heißen „befreundet“, wenn die Summe der echten Teiler der einen Zahl gleich der anderen Zahl ist und umgekehrt - Beispiel: $a = 220$; $b = 284$: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$; $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Eine natürliche Zahl heißt „vollkommen“, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist, d. h. wenn sie mit sich selbst befreundet ist - Beispiel: $6 = 1 + 2 + 3$.

Durch das Aufblühen der Astronomie im Islam (beispielsweise richtet sich der islamische Kalender nach der ersten Sichtbarkeit der Mondsichel nach Neumond) wuchs die Notwendigkeit präziser geometrischer Berechnungen. AL-KASHI widmete sich bereits sehr früh der Astronomie und erstellte astronomische Tabellen, mit deren Hilfe die Bewegung der Sonne, des Mondes und der Planeten vorhergesagt werden konnten.

Außerdem wurden Tafelwerke erstellt, in denen die Werte der trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus für beliebige Winkel erfasst wurden (diese Funktionen waren im Prinzip bereits von griechischen Mathematikern benutzt, aber erst von indischen Mathematikern systematisch eingeführt worden; arabische Mathematiker definierten zusätzlich die Winkelfunktionen Tangens, Cotangens, Secans und Cosecans).

AL-KASHI gelang die Berechnung eines sehr genauen Wertes für $\sin(1^\circ)$, aus dem dann u. a. von ULUGH BEG brauchbarere Näherungswerte für andere Winkel berechnet werden konnten.

Vom gleichseitigen Dreieck kennen wir die exakten Werte von $\sin(30^\circ)$ und $\cos(30^\circ)$, nämlich $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ und von $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Beim regelmäßigen 5-Eck lassen sich die exakten Werte von $\sin(36^\circ)$ und $\cos(36^\circ)$ wie folgt bestimmen:

Bezeichnen wir die Länge der Seiten im regelmäßigen 5-Eck mit s , die der Diagonalen mit x , dann liest man in den zueinander ähnlichen Dreiecken folgendes Verhältnis ab:

$$x : s = s : (x-s), \text{ also } x = s \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ d.h. } \cos(36^\circ) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

und folglich $\sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Zu diesen Zahlen

kann man beliebig genaue Dezimalbrüche berechnen, aus diesen dann mithilfe der Additionstheoreme auch entsprechend genaue Werte von $\sin(6^\circ)$ und $\cos(6^\circ)$:

$$\sin(6^\circ) = \sin(36^\circ) \cdot \cos(30^\circ) - \sin(30^\circ) \cdot \cos(36^\circ) \text{ bzw.}$$

$$\cos(6^\circ) = \cos(30^\circ) \cdot \cos(36^\circ) - \sin(30^\circ) \cdot \sin(36^\circ).$$

Hieraus berechnet man dann mithilfe von

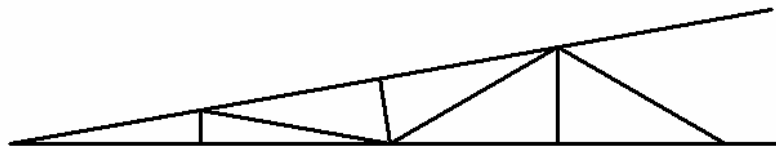
$$\sin(3^\circ) = \sqrt{\frac{1-\cos(6^\circ)}{2}} \text{ und } \cos(3^\circ) = \sqrt{\frac{1+\cos(6^\circ)}{2}} \text{ Näherungswerte für } \sin(3^\circ) \text{ und } \cos(3^\circ).$$

Um auf $\sin(1^\circ)$ bzw. $\cos(1^\circ)$ schließen zu können, benötigt man schließlich noch die folgenden Sonderfälle der Additionstheoreme:

$$\sin(3\alpha) = 3 \cdot \sin(\alpha) - 4 \cdot \sin^3(\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \cos(3\alpha) = 4 \cdot \cos^3(\alpha) - 3 \cdot \cos(\alpha),$$

Diese Gleichungen lassen sich beispielsweise aus der folgenden Figur herleiten: Die Strecken der Zickzack-Linie haben jeweils die Länge 1; in der Figur treten von links nach rechts die Winkel $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ auf. Aus den Verhältnisgleichungen ergeben sich die o. a. Beziehungen.

$$\frac{\cos(\alpha)}{1} = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{2\cos(\alpha)+\cos^3(\alpha)}{1+2\cos(\alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{\sin(2\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{\sin(3\alpha)}{1+2\cos(2\alpha)}$$



Bereits griechische Mathematiker hatten sich vergeblich mit dem Problem beschäftigt, durch Konstruktion einen beliebigen Winkel in drei gleich große Winkel zu teilen. GAUSS bewies 1801, dass eine solche Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist. Um $\sin(1^\circ)$ aus $\sin(3^\circ)$ berechnen zu können, muss man die folgende Gleichung 3. Grades lösen:

$$x^3 + b = a \cdot x, \text{ wobei } x = \sin(1^\circ); a = \frac{3}{4}; b = \frac{1}{4} \cdot \sin(3^\circ).$$

AL-KASHI bestimmte die Lösung schrittweise: $x = \frac{b+x^3}{a} \approx \frac{b}{a}$ ist eine erste Näherungslösung, die man wieder in die Gleichung einsetzt: $x_2 = \frac{b+x_1^3}{a}$, dann $x_3 = \frac{b+x_2^3}{a}$ usw.

AL-KASHIS auf 18 Dezimalstellen genaues Ergebnis war schließlich:

$$\sin(1^\circ) = 0,017452406437283571$$