Juni 2005

Vor über 1500 Jahren lebte ZU CHONGZHI (429 – 500)

Als besondere Leistung des chinesischen Mathematikers ZU CHONGZHI gilt die Bestimmung der Kreiszahl π mit einer Genauigkeit von 7 Dezimalstellen. Diese Genauigkeit wurde erst im 15. Jahrhundert, also fast 1000 Jahre später, durch den letzten großen Mathematiker des islamischen Mittelalters, AL KASHI, in Samarkand und Ende des 16. Jahrhunderts in Europa durch LUDOLPH VAN CEULEN übertroffen, bevor um 1670 mit der Entwicklung der Differentialrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ völlig andere Berechnungsmethoden entdeckt wurden.

ZU CHONGZHI war als Beamter am chinesischen Hof tätig, bevor er sich 464 vollständig der Mathematik und der Astronomie zuwandte. Als hoher Regierungsbeamter hatte er sich darum bemüht, einen Kalender einzuführen, der besser als der verwendete Kalender dem Sonnen- und Mondzyklus entsprach. Damals galt noch ein Kalender mit 19-Jahres-Zyklus, 12 Jahre mit 12 Monaten (chinesischer Monat: Zeit von Neumond zu Neumond) und 7 Jahre mit einen 13. Monat. Sein Vorschlag, einen Kalender mit einem Zyklus von 391 Jahren einzuführen (davon 144 Jahre mit 13 Monaten), wurde dann nicht realisiert, als der regierende Herrscher 464 starb. Die durchschnittliche Jahreslänge wäre beim vorgeschlagenen Zyklus nur mit einem Fehler von 50 Sekunden gegenüber der wahren Länge eines tropischen Jahrs behaftet gewesen.

ZU CHONGZHI verfasste zusammen mit seinem Sohn ZU GENG ein Mathematikbuch, das große Anerkennung fand, aber als zu schwierig für die Lehre empfunden wurde und vermutlich aus diesem Grund nicht erhalten ist. Neben der korrekten Formel zur Berechnung des Kugelvolumens enthält das Buch Hinweise auf Interpolationsverfahren.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

Ohne nähere Analyse wirken die Zahlen 391 und 144 in ZU CHONGZHIs Kalenderentwurf ziemlich willkürlich; tatsächlich ist der Bruch 144/391 nur ein Näherungsbruch für den Anteil von Tagen, der über den Zeitraum von 12 Monaten hinausgeht. Offensichtlich beherrschte ZU CHONGZHI die Methode der so genannten Kettenbruchentwicklung. Um uns diese Methode zu verdeutlichen, betrachten wir einen gekürzten Bruch, z. B. den Quotienten der beiden Primzahlen 1951 und 2459.

Diesen Bruch kann man schrittweise in einen Kettenbruch umformen:

$$\frac{1951}{2459}=\frac{1}{1+\frac{508}{1951}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{427}{508}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{81}{427}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{22}{81}}}}}=\ldots=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}}}}$$

Das Umformungsverfahren muss nach endlich vielen Schritten enden, da der Nenner des jeweils „letzten" Bruchs von Schritt zu Schritt immer kleiner wird.

Führt man die Division 1951 : 2459 aus, so erhält man 0,7934119... Bricht man die Kettenbruchentwicklung des Bruchs vorher ab, d.h. lässt man Teile des Kettenbruchs einfach weg, dann erhält man einen Bruch, der aus kleineren Zahlen in Zähler und Nenner besteht, dessen Dezimalbruch jedoch ziemlich nahe beim oben angegebenen Dezimalbruch 0,7934119... liegt. Durch Rückwärtsrechnen erhält man beispielsweise

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{5}{6}}}=\frac{1}{1+\frac{6}{23}}=\frac{23}{29}\approx 0{,}7931034...$$

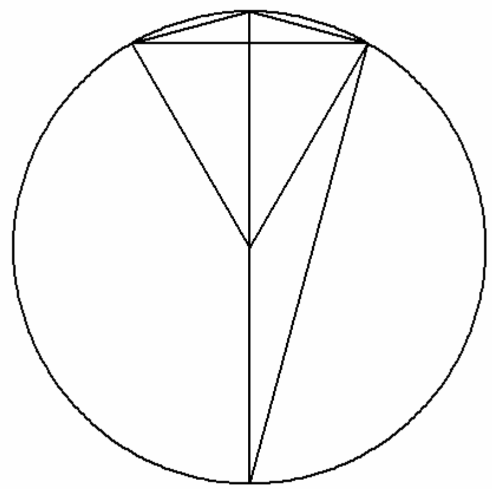
Dieser „kleinere" Kettenbruch $^{23}/_{29}$ ist ein ausgezeichneter Näherungswert für $^{1951}/_{2459}$. Tatsächlich macht man nur einen Fehler von 0,04 %, wenn man mit $^{23}/_{29}$ statt mit $^{1951}/_{2459}$ rechnet. Das Verfahren garantiert optimale Näherungswerte.

ZU CHONGZHI gibt für die Kreiszahl π den Näherungsbruch $^{355}/_{113}$ an. Schreibt man diese Zahl als Kettenbruch, so erhält man: $\frac{355}{113}=3+\frac{16}{113}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}$.

Lässt man bei diesem Kettenbruch den letzten Summanden weg, ergibt sich für π der Näherungsbruch $3\,^{1}/_{7} = {}^{22}/_{7}$, ein Wert, der bereits ARCHIMEDES bekannt war.

Bei seinen Berechnungen von π ging ZU CHONGZHI wie folgt vor: Ausgehend vom regelmäßigen 6-Eck, dessen Umfang dreimal so groß ist wie der Durchmesser (Länge der längeren Diagonalen), wird die Anzahl der Ecken schrittweise verdoppelt.

Zwischen den Seitenlängen eines regelmäßigen n-Ecks und eines regelmäßigen 2n-Ecks besteht folgender Zusammenhang: Bezeichnet man die Seite des regelmäßigen n-Ecks mit s_n, die des regelmäßigen 2n-Ecks mit s_{2n} sowie den Abstand des Mittelpunkts von der Seite des n-Ecks mit x, dann gilt:



$s_{2n}^2 = 2r \cdot (r - x)$ nach Höhensatz

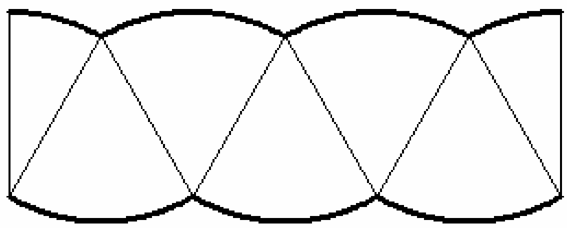
$r^2 = \frac{s_n^2}{4} + x^2$ nach Pythagoras, also $x = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$

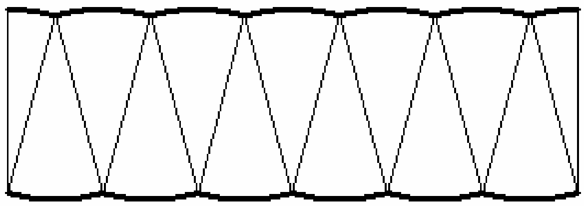
und damit $s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}}$

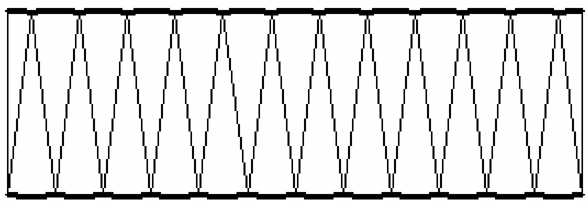
Mit r = 1 erhält man schrittweise:

$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$,

$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$, ...







Bereits ARCHIMEDES bewies, dass ein Kreis den gleichen Flächeninhalt hat wie ein Rechteck mit den Seiten „halber Kreis-Durchmesser" und „halber Kreis-Umfang" (vgl. Abbildungen rechts). Definiert man die Kreiszahl π als das Verhältnis von Umfang eines Kreises zum Durchmesser, dann ist π also näherungsweise gleich dem halben Umfang eines regelmäßigen n-Ecks.

n	Umfang des n-Ecks	Näherung für π
6	6	3
12	$\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0{,}517638...$	3,105828...
24	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \approx 0{,}2610523...$	3,1326286...
48	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \approx 0{,}13080625...$	3,1393502...
96	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \approx 0{,}0654381...$	3,141031950...

Um eine Genauigkeit von 7 Dezimalstellen zu erreichen, muss ZU CHONGZHI – ohne die Hilfsmittel, die uns heute zur Verfügung stehen – die Seitenlänge eines regelmäßigen 24576-Ecks berechnet haben – eine aus heutiger Sicht unglaubliche Rechenleistung!