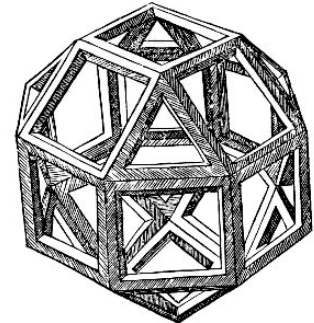
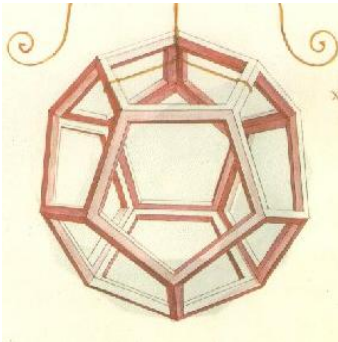


März 2005

Vor 560 Jahren geboren: Luca PACIOLI (1445 - 1517)



Welche besonderen mathematischen Leistungen hat der italienische Mathematiker Luca Pacioli vollbracht, dass ihm eine Briefmarke gewidmet wurde? Nach ihm ist weder ein mathematischer Satz benannt, noch setzten sich die von ihm eingeführten neuen Schreibweisen in der Algebra auf Dauer durch. Fra Luca Pacioli (Fra' = Frater = Bruder; er war Mitglied des Franziskanerordens) verfasste zwei berühmte Bücher:

- 1494 das Buch *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Zusammenfassende Darstellung über Arithmetik, Algebra und Geometrie); die italienische Post widmete 1994 diesem Buch die abgebildete Sonderbriefmarke;
- 1509 das Buch *Divina proportione* (Der Goldene Schnitt), für das kein Geringerer als sein Freund Leonardo da Vinci die Zeichnungen anfertigte (s. o.).

Die besondere Leistung Luca Paciolis war also die Tatsache, dass es ihm gelang, das gesamte mathematische Wissen der damaligen Zeit in einem 600 Seiten umfassenden Werk zusammenzutragen und darzustellen. Das Buch erschien in italienischer (also nicht in lateinischer) Sprache, was zu einer starken Verbreitung führte, und: Es war ein gedrucktes Buch, das nachgedruckt werden konnte und mehrfach nachgedruckt wurde. Später lebende Mathematiker bezogen sich oft auf die „Summa“; insofern beeinflusste Luca Pacioli die Entwicklung der Mathematik in erheblichem Maße.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Luca Pacioli lehrte an verschiedenen Universitäten Italiens (Perugia, Florenz, Bologna, Pisa, Rom, Neapel, Venedig); der häufige Wechsel wurde durch die politischen Bedingungen (Kriege zwischen den Stadtstaaten) verursacht.

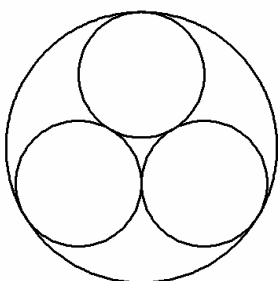
Was beschäftigte die Mathematiker in der damaligen Zeit?

Die arabisch-indische Ziffernschreibweise hatte sich in Europa durchgesetzt. Es gab allerdings noch nicht die heute üblichen Schreibweisen für Summen und Differenzen; Pacioli schlug vor: p kurz für *plus* (italienisch: *piu* = mehr) und m für *minus* (italienisch: *meno*) zu schreiben, außerdem verwandte er das Symbol R für die Quadratwurzel (*radix*). Zu Paciolis Zeit war das Gleichheitszeichen noch nicht als Symbol eingeführt. Aus heutiger Sicht war es daher ziemlich kompliziert, Beziehungen zwischen Größen auszudrücken; die Gleichung $x^4 + x = x^2 + a$ wurde als „*Censo de censo e cosa equale a censo e numero*“ beschrieben (dabei steht „*cosa*“ für die unbekannte Zahl, „*censo*“ das Quadrat dieser Zahl, entsprechend „*censo de censo*“ die vierte Potenz).

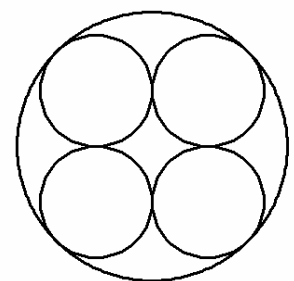
Viele der mathematischen Erkenntnisse, die Pacioli in seinem Werk zusammentrug, waren den Büchern Euklids entnommen bzw. stammten von Leonardo von Pisa (ca. 1170 - ca. 1250), auch unter dem Namen FIBONACCI bekannt, der im Jahr 1202 das erste abendländische Mathematikbuch, das „*Liber abaci*“, schrieb.

Die „*Summa*“ umfasste acht Kapitel: Das erste enthält eine Zusammenfassung der Bücher Euklids über die geometrischen Grundkonstruktionen, die Flächeninhaltsberechnungen sowie die Ähnlichkeitslehre, das zweite beschäftigt sich mit den besonderen Linien im Dreieck (Mittelsenkrechten, Seitenhalbierenden usw.), das dritte mit rechtwinkligen Dreiecken und der damit verbundenen Lösung von quadratischen Gleichungen (Satzgruppe des Pythagoras); anders als in der Antike erfolgt die Lösung der quadratischen Gleichungen jedoch in rechnerischer, nicht in zeichnerischer Form.

Im vierten Kapitel geht es um die Kreislehre; Pacioli stellt so genannte Sehnentafeln auf; diese enthalten Angaben über die Länge von Sehnen und die zugehörigen Kreisbögen; für π gibt er den Näherungswert $3\frac{33}{229}$ an. Im fünften Kapitel wird die Teilung von geometrischen Figuren behandelt (Verhältnislehre); das sechste Kapitel gibt an, wie Oberflächen und Volumina von Körpern berechnet werden (wie bei Euklid). Im siebten Kapitel werden Geräte und Methoden zur Vermessung vorgestellt.



Das achte Kapitel enthält eine Reihe von Anwendungsaufgaben unterschiedlicher Art: Berechnung des Volumens eines Fasses (näherungsweise beschrieben durch zwei Kegelstümpfe), Einbeschreiben von mehreren möglichst großen, aber gleich großen Kreisen im Dreieck und im Kreis, sowie Berechnungen an



regulären Körpern (auf der Briefmarke ist z. B. ein Dodekaeder abgebildet).

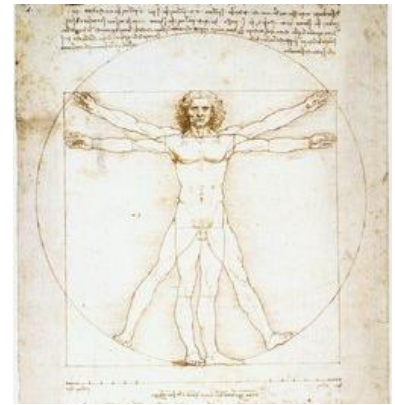
Weiter führt Pacioli in der „*Summa*“ das Prinzip der doppelten Buchführung ein und gibt Umrechnungstabellen für die verschiedenen Währungen und Maßeinheiten der italienischen Staaten an.

Pacioli beschäftigt sich außerdem mit Gleichungen dritten und vierten Grades, die er für unlösbar („*impossibile*“) hält, was später durch Scipione del Ferro (um 1515, jedoch nicht veröffentlicht), Niccolo Tartaglia (1535) und Girolamo Cardano (1545) widerlegt wurde. Die spannende Geschichte der Entdeckungen und der persönlichen Schicksale ist in dem Roman „Der Rechenmeister“ von Dieter Jörgensen dargestellt.

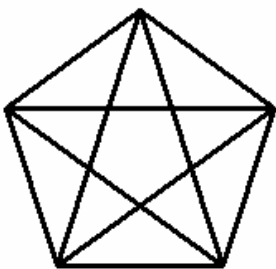
Schließlich ist auch eine Aufgabe enthalten, das als Luca'sches Problem bezeichnet wird: Luca Pacioli gab eine Lösung an, die aus heutiger Sicht als falsch angesehen werden kann. Auch andere Mathematiker beschäftigten sich mit der Lösung des Problems. Erst aus einem Briefwechsel von Pascal und Fermat entwickelte ich ein Lösungsweg, der unserem heutigen Vorgehen mithilfe von Baumdiagrammen entspricht.

A und B knobeln um einen vorher festgelegten Betrag; Sieger soll sein, wer zuerst sechsmal gewonnen hat. Beim Stand 5 : 3 muss das Spiel abgebrochen werden. Wie ist der ausgesetzte Gewinnbetrag gerecht zwischen den beiden Spielern aufzuteilen?

Auch die rechts stehende Zeichnung stammt aus der dem Buch „*Divina proportione*“ (= himmlische Teilung) und wurden Leonardo da Vincis angefertigt.



Unter dem „*Goldenen Schnitt*“ versteht man die Teilung einer Strecke in zwei Teilstrecken, wobei sich die kürzere Teilstrecke zur längeren verhält wie die längere Teilstrecke zur Gesamtstrecke. Betrachten wir eine Strecke der Länge 1 und bezeichnen die längere Teilstrecke mit x , dann ergibt dies die Bedingung: $(1-x) : x = x : 1$, was auf die quadratische Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ führt. Diese Gleichung hat die positive Lösung $x = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \approx 0,618033... .$



Beispiel: Beim regulären Fünfeck (links) schneiden sich die Diagonalen mehrfach im Verhältnis des Goldenen Schnitts.

Betrachtet man bei der so genannten FIBONACCI-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder, dann nähern sich diese der Zahl 0,618033... ; die Kehrwertfolge hat den Grenzwert $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) \approx 1,618033... .$

Die neben stehende Schweizer Briefmarke veranschaulicht die FIBONACCI-Folge am „*Goldenen Rechteck*“: Innen liegt ein Rechteck, das sich aus zwei Quadraten der Seitenlänge 1 zusammensetzt, daran ist ein Quadrat der Seitenlänge 2 angefügt, rechts daneben ein Quadrat der Seitenlänge 3, darüber eines der Seitenlänge 5, links daneben der Seitenlänge 8, darunter der Seitenlänge 13, rechts der Seitenlänge 21. Durch die Quadrate lässt sich eine „*Spirale*“ aus Viertelkreisbögen zeichnen.

