Mai 2005

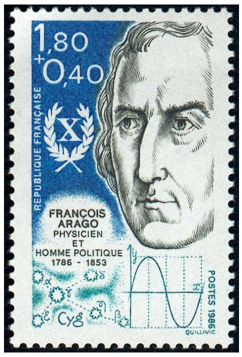
Vor 175 Jahren starb **Joseph Fourier** (21.03.1768 – 16.05.1830)

Laplace
1749 - 1827

Lagrange
1736 - 1813

Carnot
1753 - 1823

Monge
1746 - 1818



Arago
1786 – 1853

Bereits im Alter von 21 Jahren wurde Jean-Baptiste Joseph Fourier Lehrer für Mathematik an der École Royale Militaire in Auxerre, mit seinem Schicksal hadernd, dass Newton und Pascal in diesem Alter bereits besondere Leistungen erbracht hatten, die sie „unsterblich" gemacht hätten. 1795 wechselte er an die École normale in Paris, wo sein Lehrer Lagrange die außergewöhnliche Begabung erkannte. Bereits ein Jahr später wurde er Professor für Mathematik an der von Gaspard Monge (Erfinder der Darstellenden Geometrie) und Lazare Carnot (Entdecker der Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile) neu gegründeten École Polytechnique in Paris. Sein politisches Engagement im Rahmen der französischen Revolution führte dazu, dass Napoleon ihn in den wissenschaftlichen Stab der ägyptischen Expedition berief (1798 – 1801) und ihn anschließend zum Präfekten des Departements Isère (Grenoble) ernannte. Nach Napoleons Verbannung widmete sich Fourier nur noch der Mathematik und Physik; 1817 wurde er mit Unterstützung von Pierre Simon Laplace zum Mitglied der Académie des Sciences ernannt, 1822 – nachdem Arago auf eine Kandidatur verzichtet hatte - zum Sekretär (Vorsitzenden) der mathematischen Abteilung.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Seine Forschungsergebnisse in der Mathematik (über Funktionen, insbesondere über die nach ihm benannten FOURIER-Reihen) und Physik (seine berühmteste Schrift war die Théorie analytique de la chaleur / Analytische Theorie der Wärme) machten ihn zu einem der berühmtesten Wissenschaftler des 19. Jahrhunderts – gleichwohl hat selbst die französische Post noch keine Briefmarke zu seinen Ehren herausgebracht.

Dass Napoleon einen Mathematiker zum Präfekten eines Departements ernannte, war nicht ungewöhnlich: Napoleon, der selbst ein begabter Mathematiker war (→ Satz von Napoleon), hielt prinzipiell Mathematiker für geeignet, wichtige Funktionen im Staat wahrzunehmen.

Zu den genialen Entdeckungen FOURIERs gehören die nach ihm benannten FOURIER-Reihen zur Beschreibung periodischer Funktionen. FOURIER fand heraus, dass sich jede periodische Funktion als eine unendliche Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen lässt:

Ist f eine 2π-periodische Funktion, dann lässt sich diese Funktion mithilfe der Reihe $\frac{1}{2}\cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$ beschreiben. Diese konvergiert gegen f(x), wenn die Koeffizienten a_n und b_n (FOURIER-Koeffizienten) wie folgt berechnet werden:

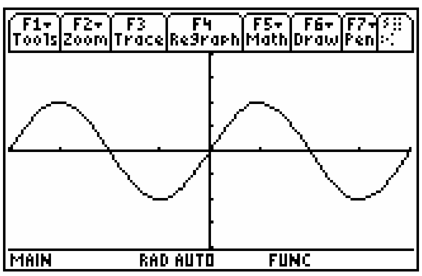
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \;;\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx \;;\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx$$

Ist f(x) eine gerade Funktion, dann gilt $b_n = 0$ für alle n, eine ungerade Funktion, dann entsprechend $a_n = 0$ für alle n.

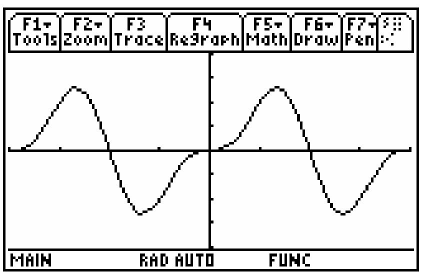
Beispiele: Von den folgenden 2π-periodischen Funktionen ist jeweils nur der Funktionsterm für ein Intervall der Länge 2π angegeben.

(1) $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$ (Sägezahn)

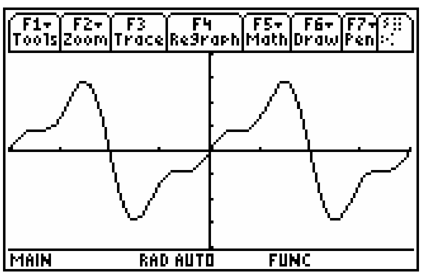
Näherungsfunktion: $p_n(x) = 2\cdot[\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}]$



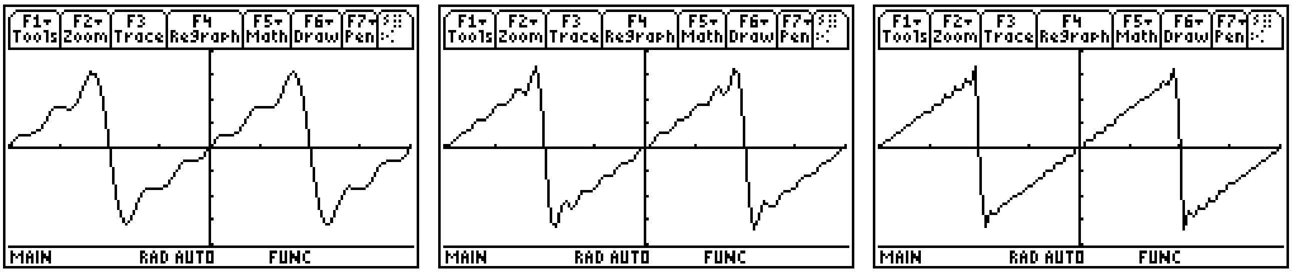
n = 1



n = 2



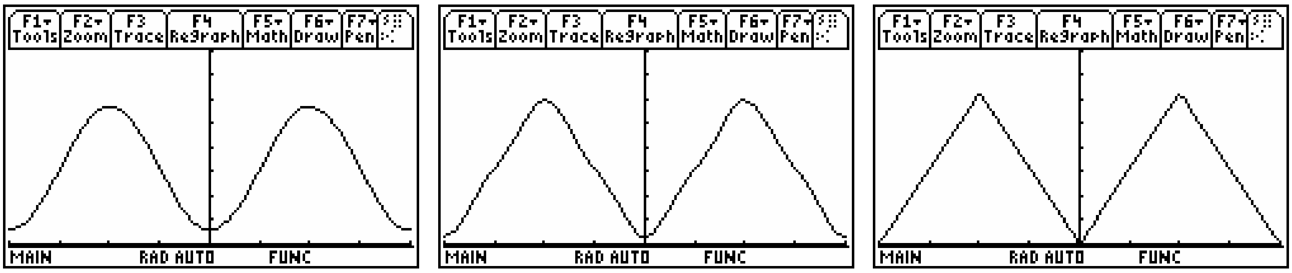
n = 3



n = 5 n = 10 n = 20

(2) f(x) = | x | für $-\pi < x < \pi$ (Zickzack)

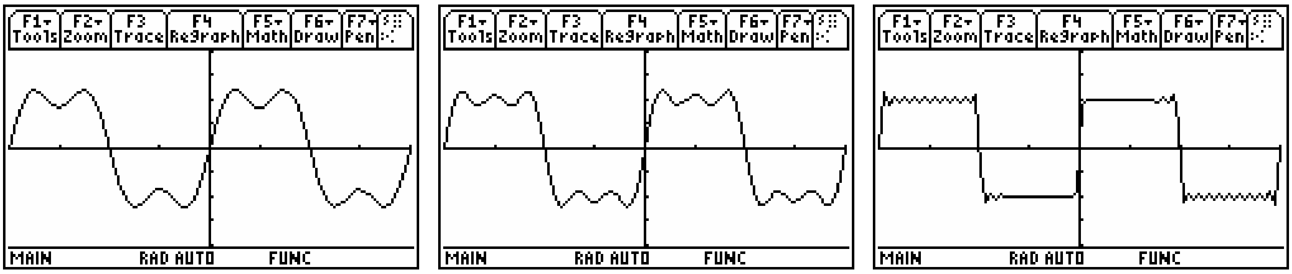
Näherungsfunktion: $p_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot [\frac{\cos(x)}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + ... + \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}]$



n = 0 n = 1 n = 9

(3) f(x) = -1 für $-\pi < x < 0$ und f(x) = +1 für $0 < x < \pi$ (Rechteck)

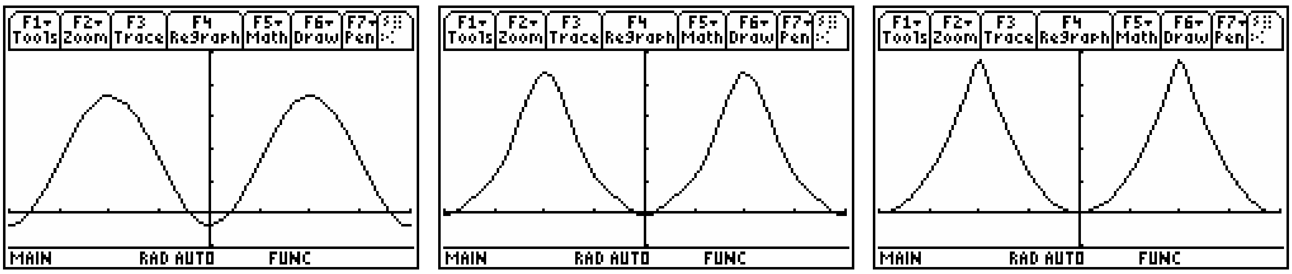
Näherungsfunktion: $p_n(x) = \frac{4}{\pi} \cdot [\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + ... + \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}]$



n = 1 n = 2 n = 9

(4) f(x) = x^2 für $-\pi < x < \pi$ (Parabel)

Näherungsfunktion: $p_n(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot [\frac{\cos(x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - ... + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\cos(nx)}{n^2}]$



n = 1 n = 3 n = 10