

Stochastik kompakt

- worauf es ankommt ...

Ziel:

Am Ende der Unterrichtssequenzen über Stochastik sollen die Schüler/innen Aufgaben aus folgenden Themenbereichen lösen können:

1. Umgang mit Vierfeldertafeln
2. Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe
3. Testen von Hypothesen

Umgang mit Vierfeldertafeln

Beim Glukosetoleranztest gibt der Arzt dem Patienten eine genau abgemessene Zuckerwassermenge zu trinken und prüft nach einer kurzen Wartezeit die Blutzuckerwerte.

Die sogenannte Sensitivität dieses Tests beträgt 72%, d. h. bei Personen, die an Diabetes erkrankt sind, reagiert der Test in 72% der Fälle („positiv“).

Die sogenannte Spezifität des Tests beträgt 73%, d. h. bei Personen, die nicht an Diabetes erkrankt sind, zeigt der Test in 73% der Fälle keine Reaktion („negativ“).

Etwa 1% der Bevölkerung ist an Diabetes erkrankt und weiß nichts von der Tatsache der Erkrankung.

Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe

Beispiel 1:

Welche Ergebnisse kann man bei einem 500fachen Münzwurf erwarten?

Beispiel 2:

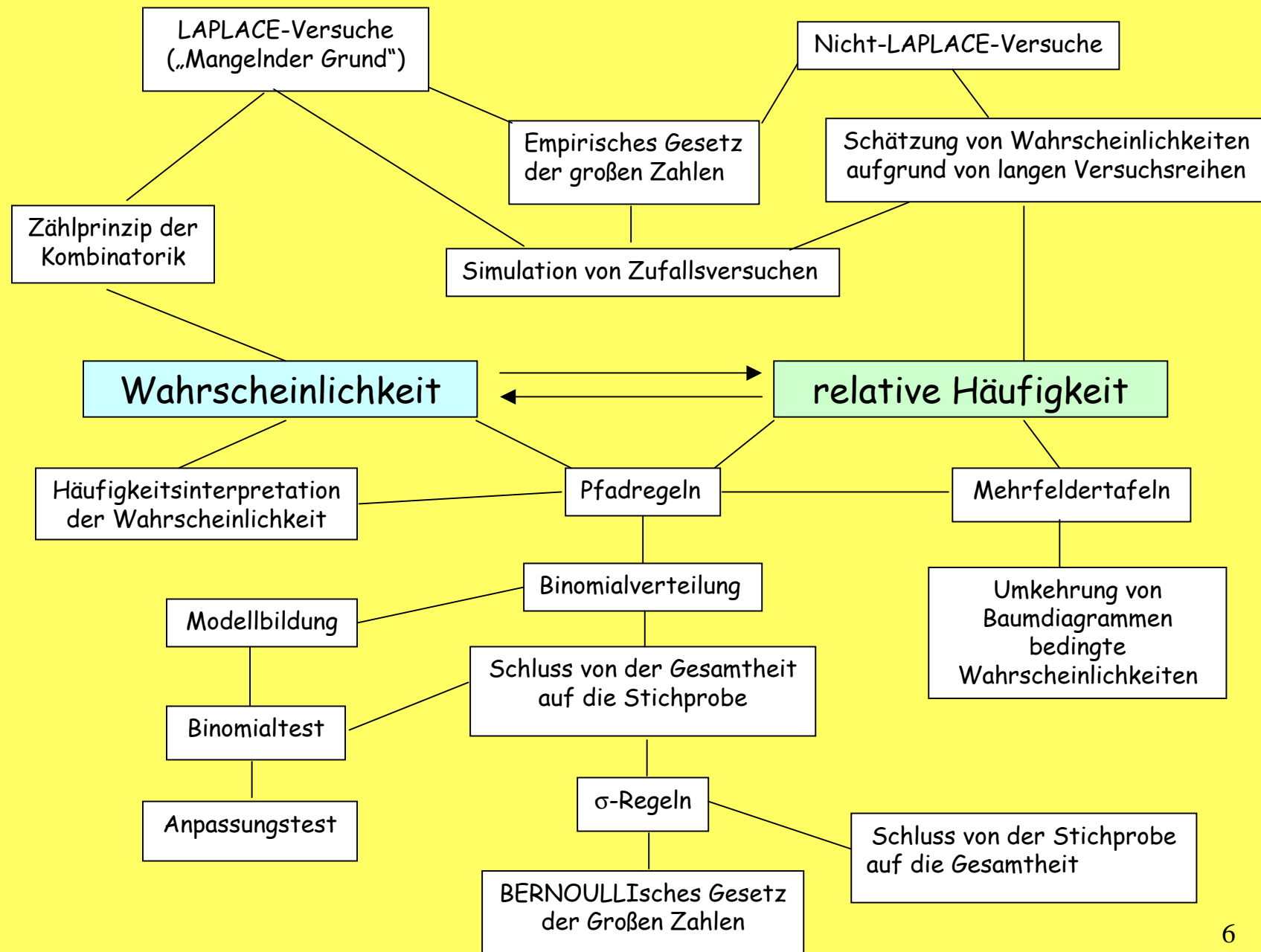
Bei der Bundestagswahl 2005 betrug die Wahlbeteiligung 77,7%. Wenn man am Tag nach der Wahl eine Zufallsstichprobe vom Umfang 1000 unter den Wahlberechtigten durchgeführt hätte, welches Ergebnis hätten wir erwarten können?

Testen von Hypothesen

Ein Arzneimittelhersteller behauptet, dass ein neues Medikament gegen eine bestimmte Krankheit bei (mindestens) 60% der Patienten hilft.

20 zufällig ausgewählte Patienten werden getestet.

Bei welchen Ergebnissen wird man die Angaben des Herstellers akzeptieren?



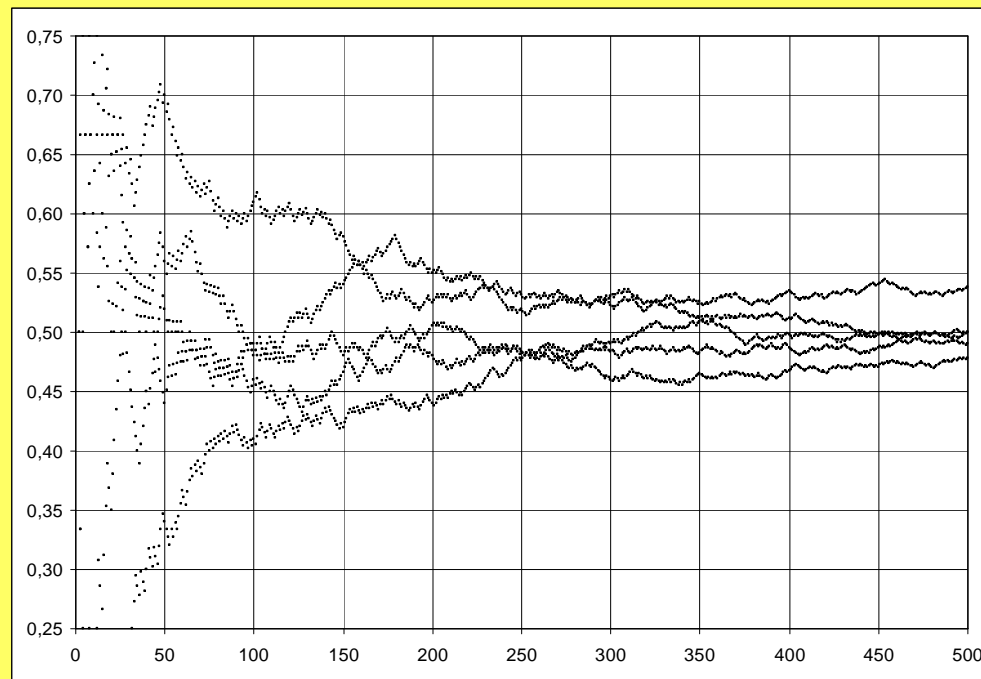
Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten - Unterschied und Zusammenhang

Wir unterscheiden im Prinzip zwei Arten von Zufallsversuchen:

- solche, bei denen kein Grund ersichtlich ist, warum die verschiedenen möglichen Ergebnisse unterschiedliche Chancen haben sollen aufzutreten; das sind die sogenannten LAPLACE-Versuche (wie beispielsweise der Münzwurf, das Würfeln, grundsätzlich alle Zufallsversuche, die sich als Ziehen mit Zurücklegen simulieren lassen).
- alle anderen Zufallsversuche (Nicht-LAPLACE-Versuche); hier sind keine Wahrscheinlichkeiten „gegeben“, sondern man kann nur die Wahrscheinlichkeiten aufgrund von langen Versuchsreihen schätzen.

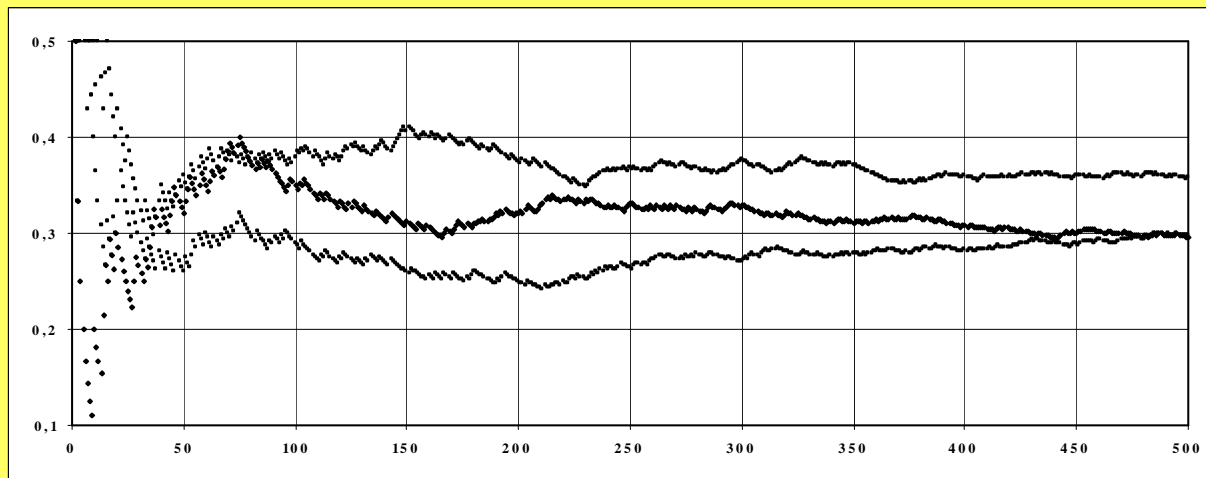
Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten - Unterschied und Zusammenhang

Das Empirische Gesetz der Großen Zahlen besagt, dass sich die relativen Häufigkeiten eines Ergebnisses in der Nähe des Wertes der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeit stabilisieren.



Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten - Unterschied und Zusammenhang

Dieses Erfahrungsgesetz können wir bei LAPLACE-Versuchen beobachten; bei Nicht-LAPLACE-Versuchen benutzen wir es, um einen Wert für die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit zu schätzen.



Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten - Unterschied und Zusammenhang

Wahrscheinlichkeiten dienen grundsätzlich der Prognose für zukünftige Zufallsversuche; sie geben an, welche relativen Häufigkeiten ungefähr eintreten werden.

Relative Häufigkeiten beziehen sich immer auf durchgeführte Zufallsversuche.

Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten - Unterschied und Zusammenhang

Wahrscheinlichkeiten veranschaulichen wir uns durch Chancen in bevorstehenden Zufallsversuchen oder mithilfe der

Häufigkeitsinterpretation:

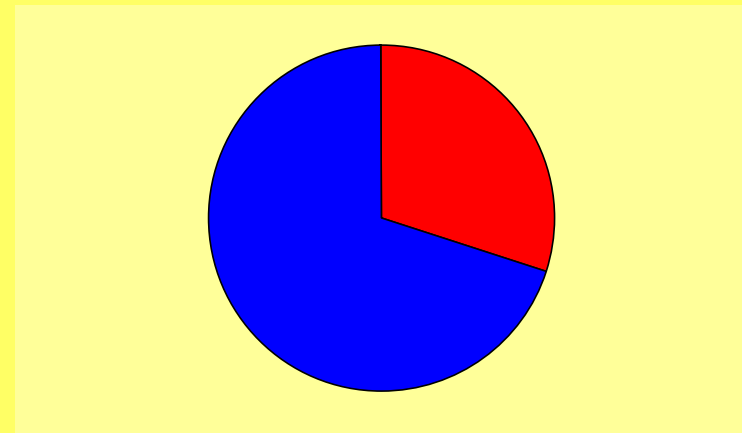
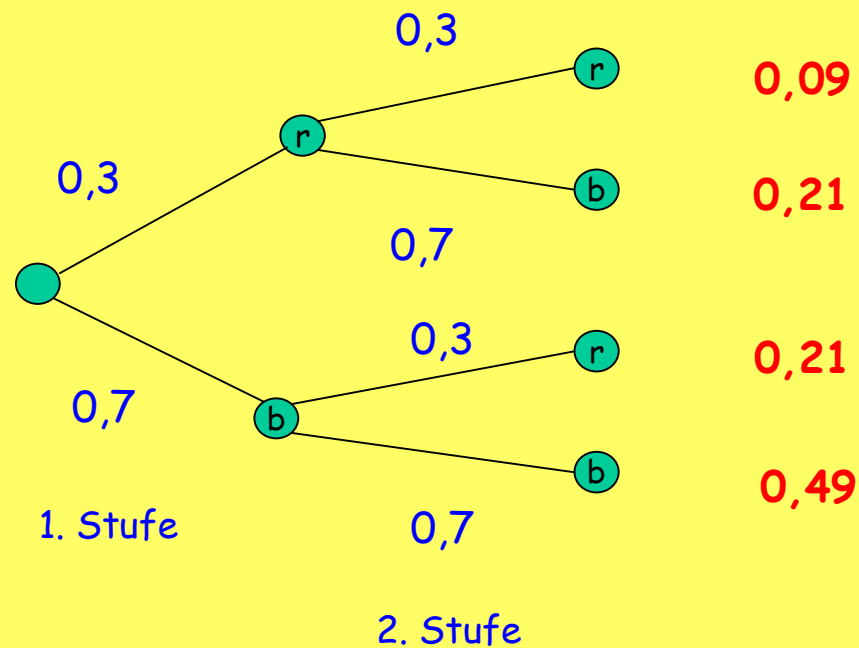
Hat ein Ergebnis die Wahrscheinlichkeit p , dann erwarten wir, dass bei n -facher unabhängiger Durchführung des Zufallsversuchs das Ergebnis ungefähr $n \cdot p$ -mal auftritt.

Simulationen dienen dazu, die Modellbildung zu schulen und zeigen eine Methode auf, auch dann Wahrscheinlichkeiten zuordnen zu können, wenn man noch nicht über die notwendigen Kenntnisse eines Kalküls verfügt.

Elementare Regeln: Pfadregeln

Die elementaren Regeln werden durch Betrachtung von Anteilen im Sinne der Häufigkeitsinterpretation plausibel gemacht und eingeübt.

Mehrstufige Zufallsversuche können mithilfe von Baumdiagrammen dargestellt werden.



Elementare Regeln: Pfadregeln

Pfadmultiplikationsregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs dieses Pfades.

Pfadadditionsregel: Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, dann ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Pfade.

Komplementärregel: Kennt man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, dann kennt man auch die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses; diese ergänzen sich nämlich zu 1.

Elementare Regeln: Zählprinzip

In einem Kompaktkurs Stochastik sollte man sich auf ein Minimum in der Kombinatorik beschränken. Einziges Ziel ist die Herleitung der Binomialkoeffizienten.

Das Allgemeine Zählprinzip der Kombinatorik lässt sich mithilfe der Fallunterscheidung an einem Baumdiagramm erläutern:

Besteht ein Zufallsversuch aus k Stufen und ist die Anzahl der möglichen Ergebnisse auf den einzelnen Stufen gleich m_1, m_2, \dots, m_k , dann hat der Zufallsversuch insgesamt $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ verschiedene mögliche Ergebnisse.

Elementare Regeln: Zählverfahren

Aus dem Zählprinzip sich, dass es beim k -fachen Ziehen aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln die folgenden Möglichkeiten gibt:

Beim Ziehen mit Zurücklegen (mit Wiederholung) gibt es n^k verschiedene Möglichkeiten.

Beim Ziehen ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung) gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ verschiedene Möglichkeiten.

Beim Ziehen mit einem Griff gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) / k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

verschiedene Möglichkeiten.

Elementare Regeln: Zählverfahren

Beispiel: Ein Lehrer erhält 5 Freikarten, die er an seine Klasse mit 28 Schülerinnen und Schülern weitergibt. Wie viele Möglichkeiten hat er?

Beim Ziehen mit Zurücklegen (mit Wiederholung) gibt es 28^5 verschiedene Möglichkeiten.

Beim Ziehen ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung) gibt es $28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24$ verschiedene Möglichkeiten.

Beim Ziehen mit einem Griff gibt es $28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 / 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten.

Ziel 1:

Vierfeldertafeln -

Umkehrung von Baumdiagrammen

Beispiel 1: Sicherheit von Schnelltests

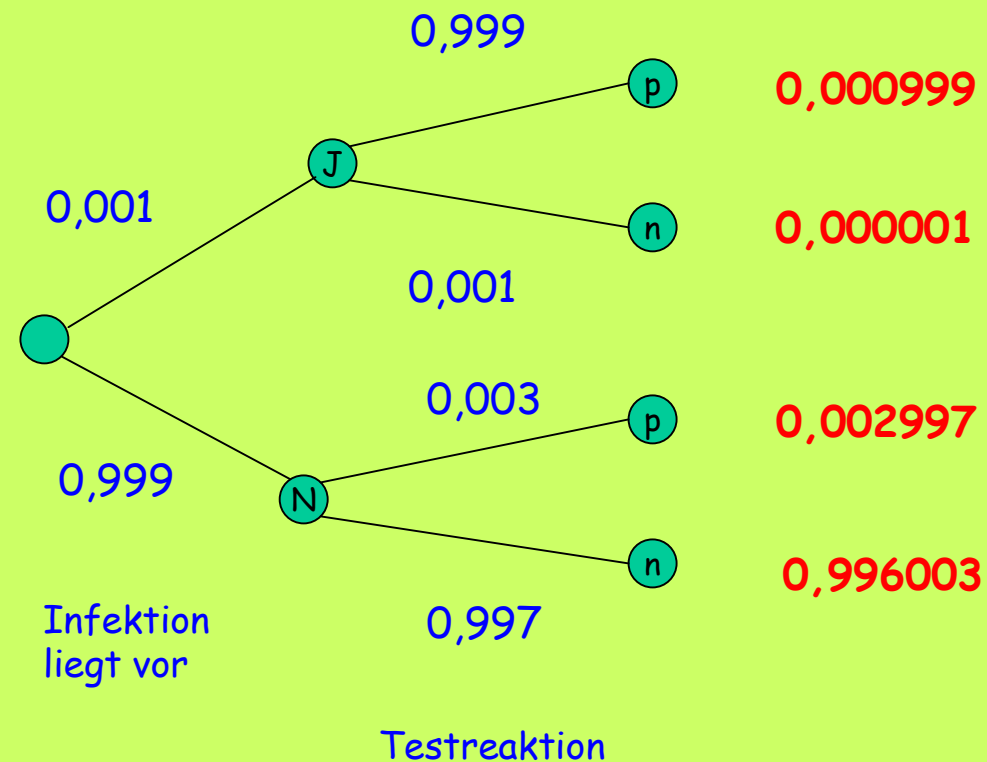
Man kann heute davon ausgehen, dass etwa 0,1 % der Bevölkerung der Bundesrepublik HIV-infiziert ist.

Die vorliegenden Testverfahren zum Nachweis der Infektion haben mittlerweile eine hohe Sicherheit (Sensitivität): bei 99,9% der tatsächlich Infizierten erfolgt positive Testreaktion; nur bei 0,3% der nicht-infizierten Testpersonen wird irrtümlich eine Infektion angezeigt (Spezifität 99,7%).

Die Informationen lassen sich unmittelbar in ein Baumdiagramm übertragen

1. Stufe: Infektion liegt vor - ja/nein,
2. Stufe: Testreaktion - positiv/negativ

Beispiel 1: Sicherheit von Schnelltests

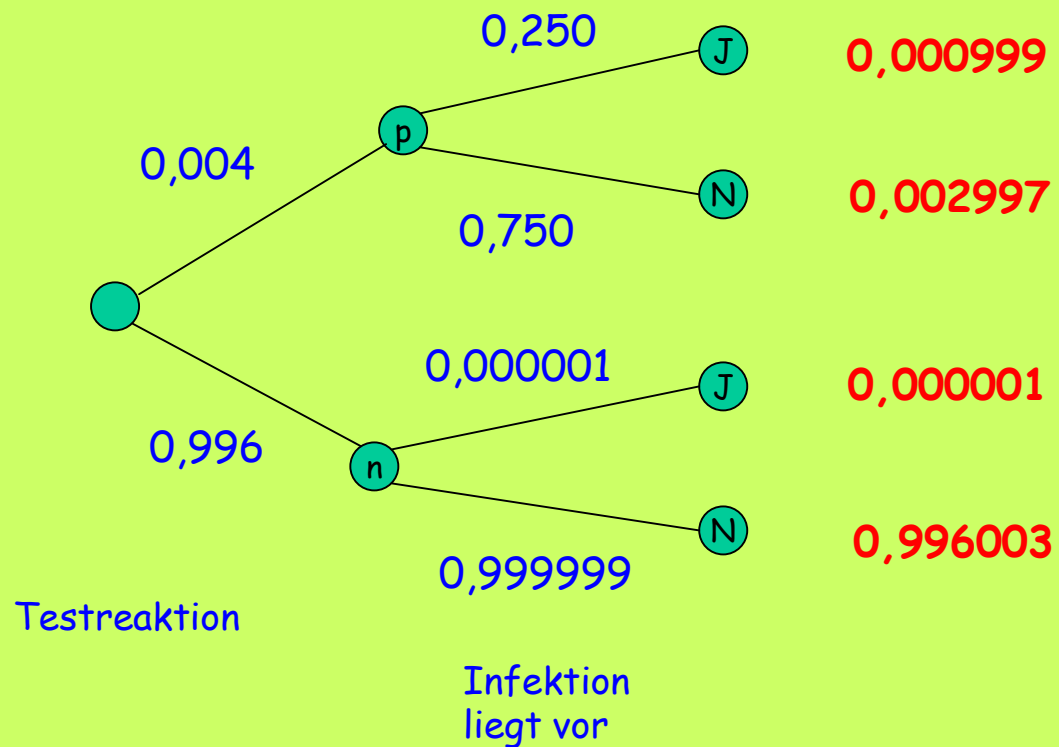


Beispiel 1: Sicherheit von Schnelltests

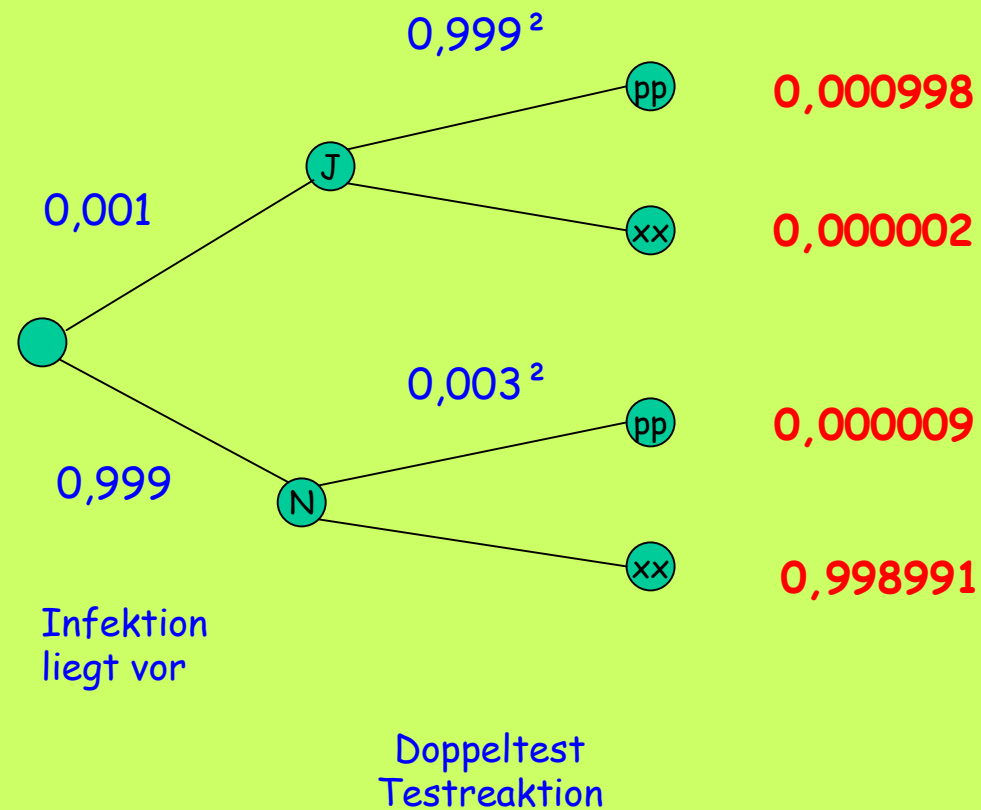
Wird der HIV-Test bei 1 Million zufällig ausgewählter Personen durchgeführt, dann kann man mit folgenden Ergebnissen rechnen:

	Test positiv	Test negativ	gesamt
Infektion liegt vor	999	1	1.000
Infektion liegt nicht vor	2.997	996.003	999.000
gesamt	3.996	996.004	1.000.000

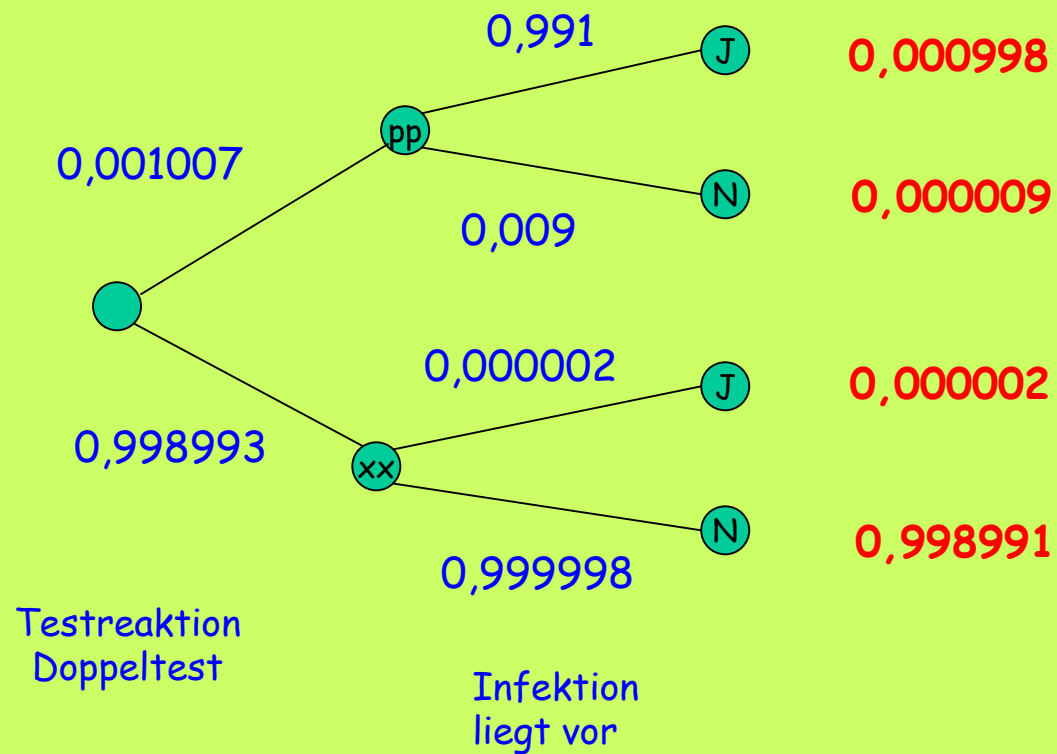
Beispiel 1: Sicherheit von Schnelltests



Beispiel 1: Doppeltest - Baumdiagramm



Beispiel 1: Doppeltest - umgekehrtes Baumdiagramm



Beispiel 2: Diabetes-Test

Beim Glukosetoleranztest gibt der Arzt dem Patienten eine genau abgemessene Zuckerwassermenge zu trinken und prüft nach einer kurzen Wartezeit die Blutzuckerwerte.

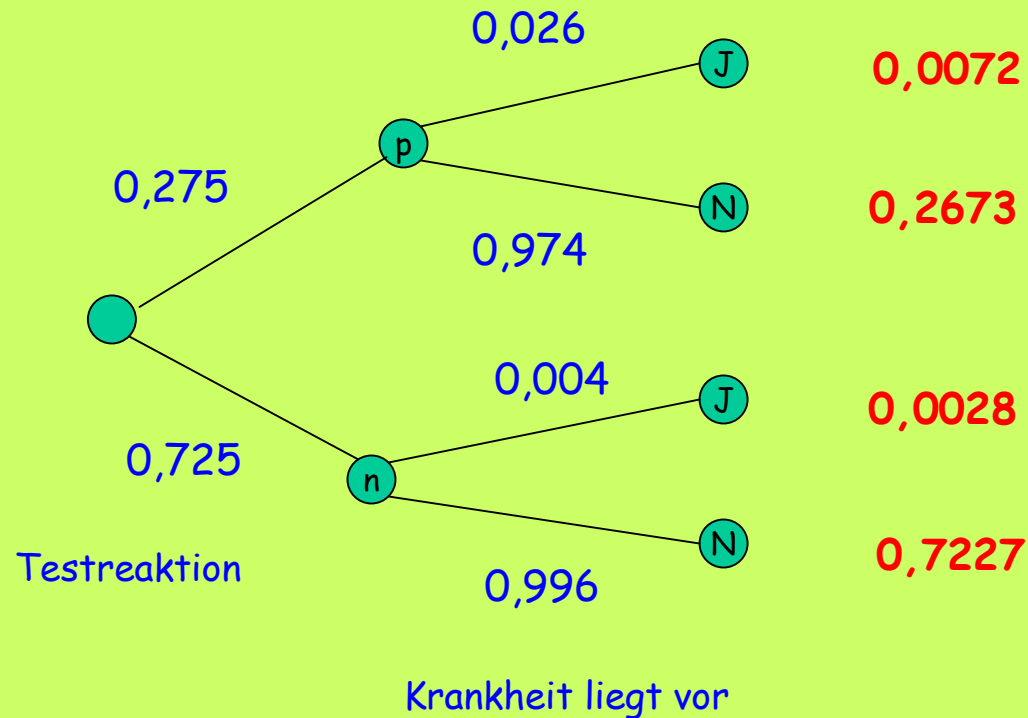
- Die Sensitivität dieses Tests beträgt 72%, d. h. bei Personen, die an Diabetes erkrankt sind, reagiert der Test in 72% der Fälle („positiv“).
- Die Spezifität des Tests beträgt 73%, d. h. bei Personen, die nicht an Diabetes erkrankt sind, zeigt der Test in 73% der Fälle keine Reaktion („negativ“).
- Etwa 1% der Bevölkerung ist an Diabetes erkrankt und weiß nichts von der Tatsache der Erkrankung.

Beispiel 2: Diabetes-Test

- Was bedeutet es, wenn bei einer Vorsorgeuntersuchung bei einem nichts-ahnenden Patienten ein „positiver“ Befund festgestellt wird?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person tatsächlich an Diabetes erkrankt?
- Wie brauchbar ist der Glukosetoleranztest überhaupt?

Beispiel 2: Diabetes-Test

Bei Personen, die an Diabetes erkrankt sind, zeigt der Test in 72% der Fälle eine positive Reaktion. Bei Personen, die nicht an Diabetes erkrankt sind, zeigt der Test in 73% der Fälle keine Reaktion. Etwa 1% der Bevölkerung ist an Diabetes erkrankt und weiß nichts von der Tatsache der Erkrankung.



Umkehrung von Baumdiagrammen

Gegeben sind statistische Daten über zwei Merkmale mit je zwei Merkmalsausprägungen, die in Form einer Vierfeldertafel oder eines Baumdiagramms zusammengestellt werden können.

Die Daten aus der Vierfeldertafel lassen sich auf zwei Arten in einem zweistufigen Baumdiagramm wiedergeben (auf der 1. Stufe wird das eine, auf der 2. Stufe das andere Merkmal betrachtet).

Umgekehrt lassen sich die Daten aus einem Baumdiagramm in eine Vierfeldertafel übertragen und daraus das andere („umgekehrte“) Baumdiagramm entwickeln.

Ziel 2:

Schluss von der Gesamtheit
auf die Stichprobe

Voraussetzung: Kenntnisse über
Binomialverteilungen

Binomialverteilung: BERNOULLI-Versuche

BERNOULLI-Versuche:

Ein Versuch wird n -fach durchgeführt; man interessiert sich nur dafür, ob ein bestimmtes Ergebnis („Erfolg“) eintritt oder nicht; während der Versuchsdurchführungen ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das interessierende Ergebnis nicht (Erfolgswahrscheinlichkeit p des BERNOULLI-Versuchs).

Die Zufallsgröße X zählt, wie oft der Erfolg eintritt (X : Anzahl der Erfolge).

Binomialverteilung:

Wahrscheinlichkeit für 0 Erfolge bzw. n Erfolge

Ein n-stufiger BERNOULLI-Versuch kann

0 Erfolge, 1 Erfolg, ..., n Erfolge haben.

Würde man das zugehörige Baumdiagramm zeichnen, dann hätte dieses 2^n Verzweigungen.

Es gilt:

$P(X=0) = (1-p)^n$ Wahrscheinlichkeit für 0 Erfolge

bzw.

$P(X=n) = p^n$ Wahrscheinlichkeit für n Erfolge

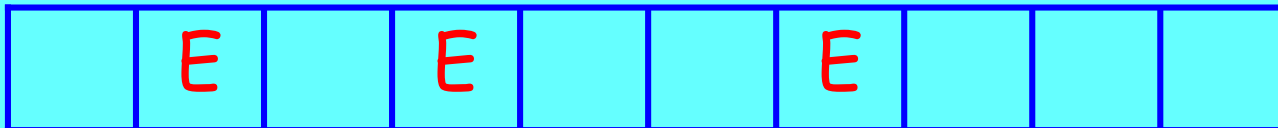
Binomialverteilung: BERNOULLI-Formel

Für die Wahrscheinlichkeit der übrigen möglichen Ereignisse benötigt man die Binomialkoeffizienten:

Zum Ereignis $X=k$ gehören $\binom{n}{k}$ über k Pfade, denn es gibt $\binom{n}{k}$ über k Möglichkeiten, aus den n Stufen k Stufen auszuwählen, auf denen ein Erfolg stattfindet.

Jeder Pfad mit k Erfolgen und $n-k$ Misserfolgen hat die Wahrscheinlichkeit $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Es gilt die BERNOULLI-Formel:
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$



Binomialverteilung: BERNOULLI-Formel

Bei der Herleitung der BERNOULLI-Formel ohne Kombinatorik entdeckt man, dass die Pfad-Anzahlen genau durch die Zahlen im PASCALSchen Dreieck beschrieben werden.

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			

Binomialverteilung: BERNOULLI-Formel

Das Konstruktionsprinzip des PASCALSchen Dreiecks liefert dann auch die Rekursionsvorschrift zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten bei BERNOULLI-Versuchen.

$$P(X = k) = \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k-1} \cdot (1-p) + \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$



Wahrscheinlichkeit für k
Erfolge in n-1 Stufen mal
Wahrscheinlichkeit für
Misserfolg auf der n-ten
Stufe



Wahrscheinlichkeit für k-1
Erfolge in n-1 Stufen mal
Wahrscheinlichkeit für Erfolg
auf der n-ten Stufe

Binomialverteilung

Eingeübt werden muss

- das Modellieren mithilfe der Binomialverteilung (z. B. Kugel-Fächer-Modell),
- das Bestimmen kumulierter Wahrscheinlichkeiten sowie
- der Umgang mit dem GTR / dem Tafelwerk.

Modellieren: Ein Geburtstagsproblem

Bei der Einschulungsfeier möchte der Schulleiter
- falls es unter den Kindern eines gibt, das am
Einschulungstag Geburtstag hat -
diesem Kind gratulieren.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter
206 Kindern mind. ein Geburtstagskind ist?

Verteilt man 206 Kinder mit ihren Geburtstagen zufällig auf
365 Tage, dann ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ca.
43% für mind. 1 Geburtstagskind.

Bei einer Einschulung von 100 Kindern ergibt sich nur eine
Wahrscheinlichkeit von ca. 24%.

Modellieren: Ein Geburtstagsproblem

Am ersten Schultag werden 206 neue Schülerinnen und Schüler eingeschult.

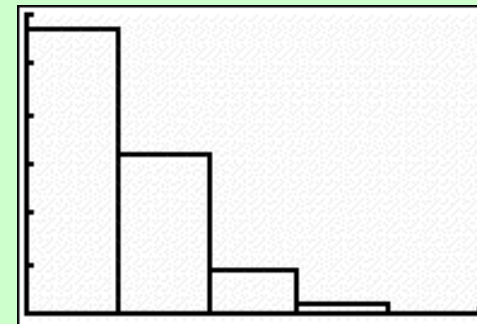
Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass hierunter (k) ein Geburtstagskind ist (oder vielleicht sogar mehr als eins)?

```
binompdf(206, 1/3  
65, 0)  
    .5682702934  
binompdf(206, 1/3  
65, 1)  
    .3216035177
```

```
binompdf(206, 1/3  
65, {0, 1, 2, 3})  
(.5682702934 .3...
```

```
binompdf(206, 1/3  
65, {0, 1, 2, 3})  
... .0905614301 ...
```

```
binompdf(206, 1/3  
65, {0, 1, 2, 3})  
...01 .0169180694)
```



Beispiele zum $1/e$ - Gesetz

100 Regentropfen fallen zufällig auf ein 10×10 Quadratgitter.

Wie viele Felder bleiben leer?



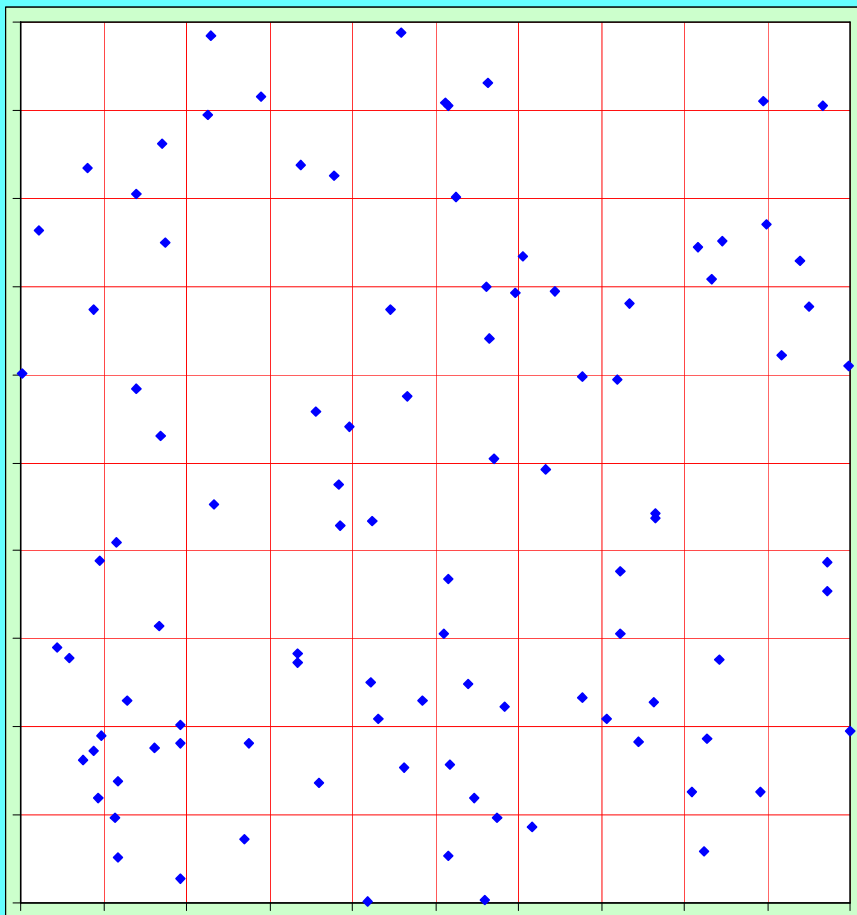
Ein Rouletterad wird 37-mal gedreht.

Auf wie vielen Feldern wird die Kugel nicht liegen geblieben sein?

365 Personen werden zufällig ausgewählt und deren Geburtstag erfasst.

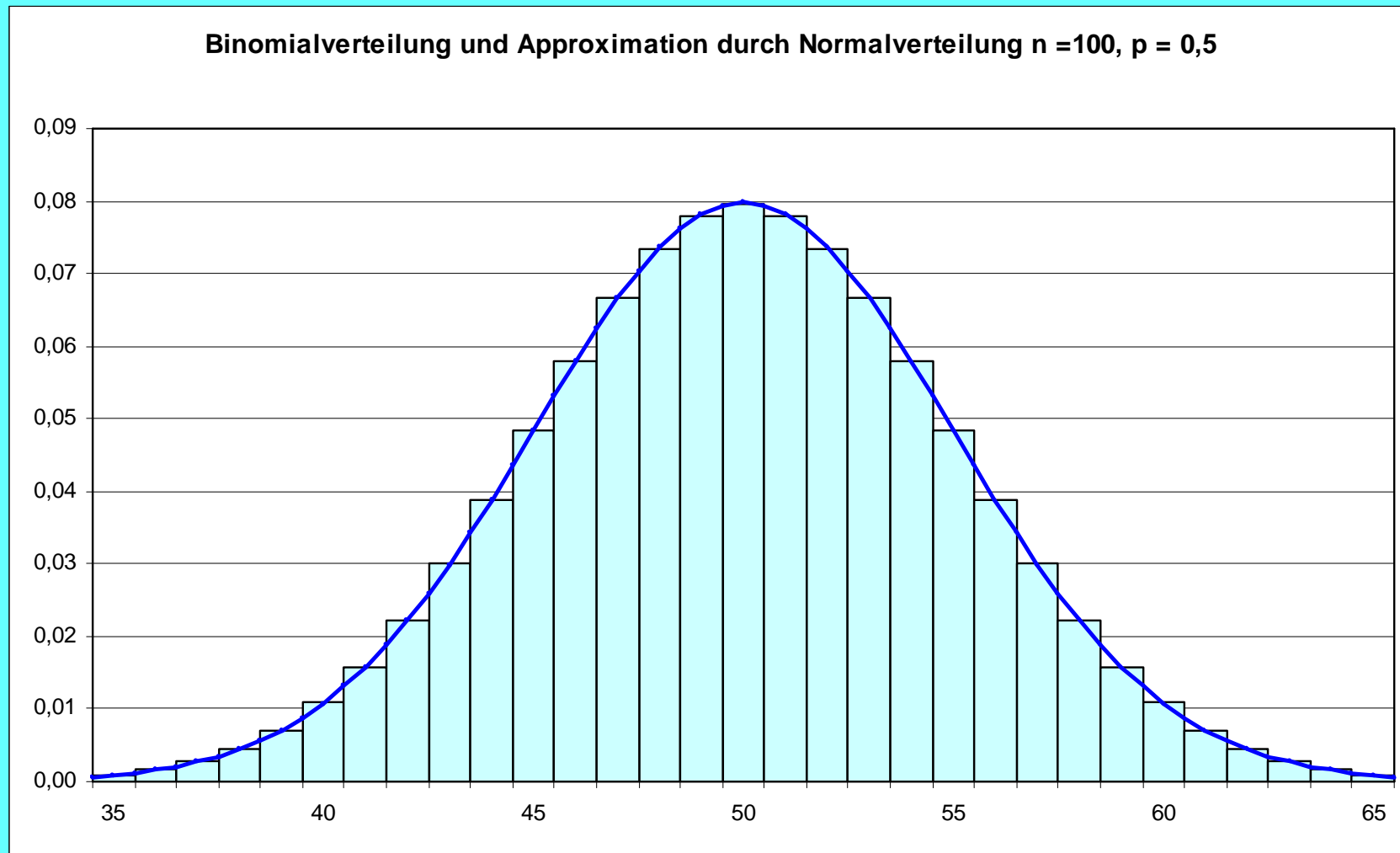
Wie viele Tage des Jahres sind ohne Geburtstagskind?

100 Regentropfen fallen zufällig
auf ein 10 x 10 Quadratgitter.



0	0	2	0	1	3	0	0	1	1
1	2	1	2	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	4	1
2	0	0	0	1	2	1	1	0	3
0	2	0	2	1	1	1	1	0	0
0	1	1	2	1	0	1	2	0	0
1	1	0	0	0	2	0	2	0	2
2	2	0	2	3	2	1	2	1	0
4	3	1	1	1	2	0	1	3	1
0	3	1	0	1	3	1	0	1	0

Binomialverteilung: sigma-Regeln



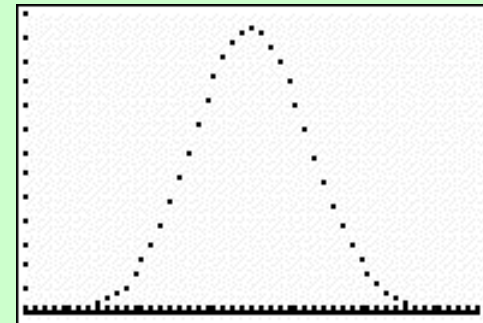
Binomialverteilung: sigma-Regeln

$n = 200 ;$

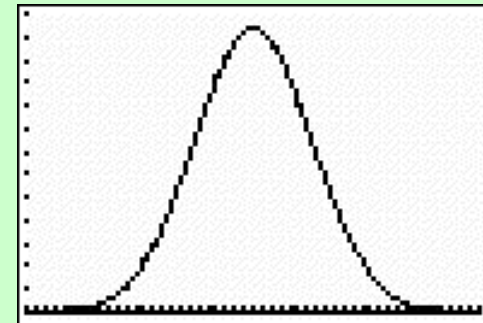
$p = 0,3$

Binomial-
und Normal-
verteilung

```
seq(X,X,0,200)→L1  
(0 1 2 3 4 5 6 ...  
binomPdf(200,.3)  
→L2  
(1.046183829E-3...
```



```
Plot2 Plot3  
\Y1=normalPdf(X,  
60,√(42))  
\Y2=  
\Y3=  
\Y4=  
\Y5=  
\Y6=
```



Binomialverteilung: Erwartungswert

Plausible Eigenschaft: Beim n -stufigen BERNOULLI-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p liegt das Maximum der Verteilung in der Nähe des Erwartungswerts $n \cdot p$.

Formale Überprüfung mithilfe des GTR:

```
seq(X, X, 0, 50) → L1
{0 1 2 3 4 5 6 ...
binompdf(50, 0.3)
→ L2
{1.798465043E-8...
```

L1	L2	L3	3
12	.08383	1.006	
13	.10502	1.3652	
14	.11895	1.6653	
15	.12235	1.8352	
16	.1147	1.8352	
17	.09831	1.6213	
18	.07725	1.3904	
L3(19) = 1.39044711...			

```
L1 * L2 → L3
{0 3.853853663E...
sum(L3)
15
```

Binomialverteilung: Varianz

Strebt man die sigma-Regeln an, dann folgt die Untersuchung des Streuverhaltens einer Binomialverteilung um den Erwartungswert:

Man führt die Varianz als geeignetes Maß für die Streuung ein - mit dem Hinweis, dass auch andere Streuungsmaße denkbar sind, sich dieses jedoch bei Binomialverteilungen als besonders „einfach“ zu berechnende Größe herausstellt.

Die Formel $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ kann man mithilfe des GTR beispielgebunden nachweisen.

$$V(X) = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot P(X = k) - E(X)^2$$

Binomialverteilung: Varianz

Varianz - Nachweis der Formel $V(X) = n \cdot p \cdot q$

```
binompdf(50, .4) →  
L2  
(8.082812775E-1...  
(L1-20)^2*L2 → L3  
(3.23312511E-9 ...  
sum(L3)  
12
```

$n = 50 ; p = 0,4$

```
binompdf(100, .2) →  
L2  
(2.037035976E-1...  
(L1-20)^2*L2 → L3  
(8.148143905E-8...  
sum(L3)  
16
```

$n = 100 ; p = 0,2$

```
binompdf(200, .3) →  
L2  
(1.046183829E-3...  
(L1-60)^2*L2 → L3  
(3.766261785E-2...  
sum(L3)  
42
```

$n = 200 ; p = 0,3$

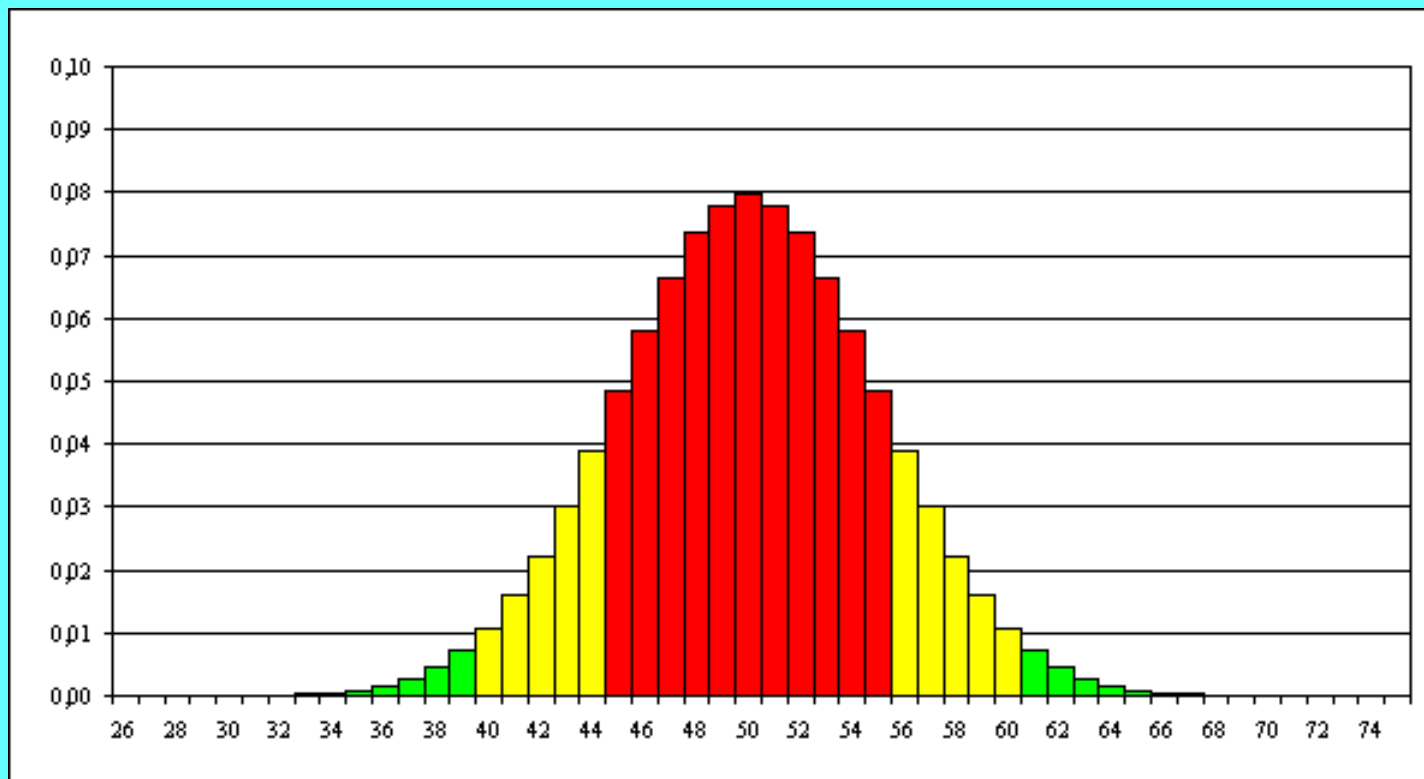


Binomialverteilung: sigma-Regeln

$$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 90\%$$

$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 95\%$$

$$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 99\%$$



Zürich 2007

Binomialverteilung: sigma-Regeln

Die Herleitung der sigma-Regeln kann so erfolgen: Man berechnet für verschiedene n und p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis eines n -stufigen BERNOULLI-Versuchs in gewissen sigma-Umgebungen um den Erwartungswert liegt.

Man stellt fest, dass nahezu unabhängig von n und p bestimmten Radien der Umgebung auch bestimmte Intervall-Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können:

$$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 68\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,5\%$$

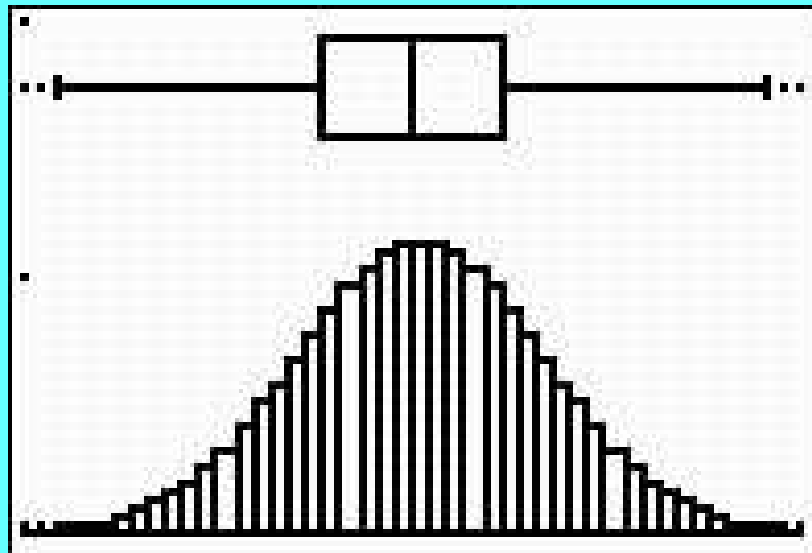
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$$

sigma-Regeln und Boxplots

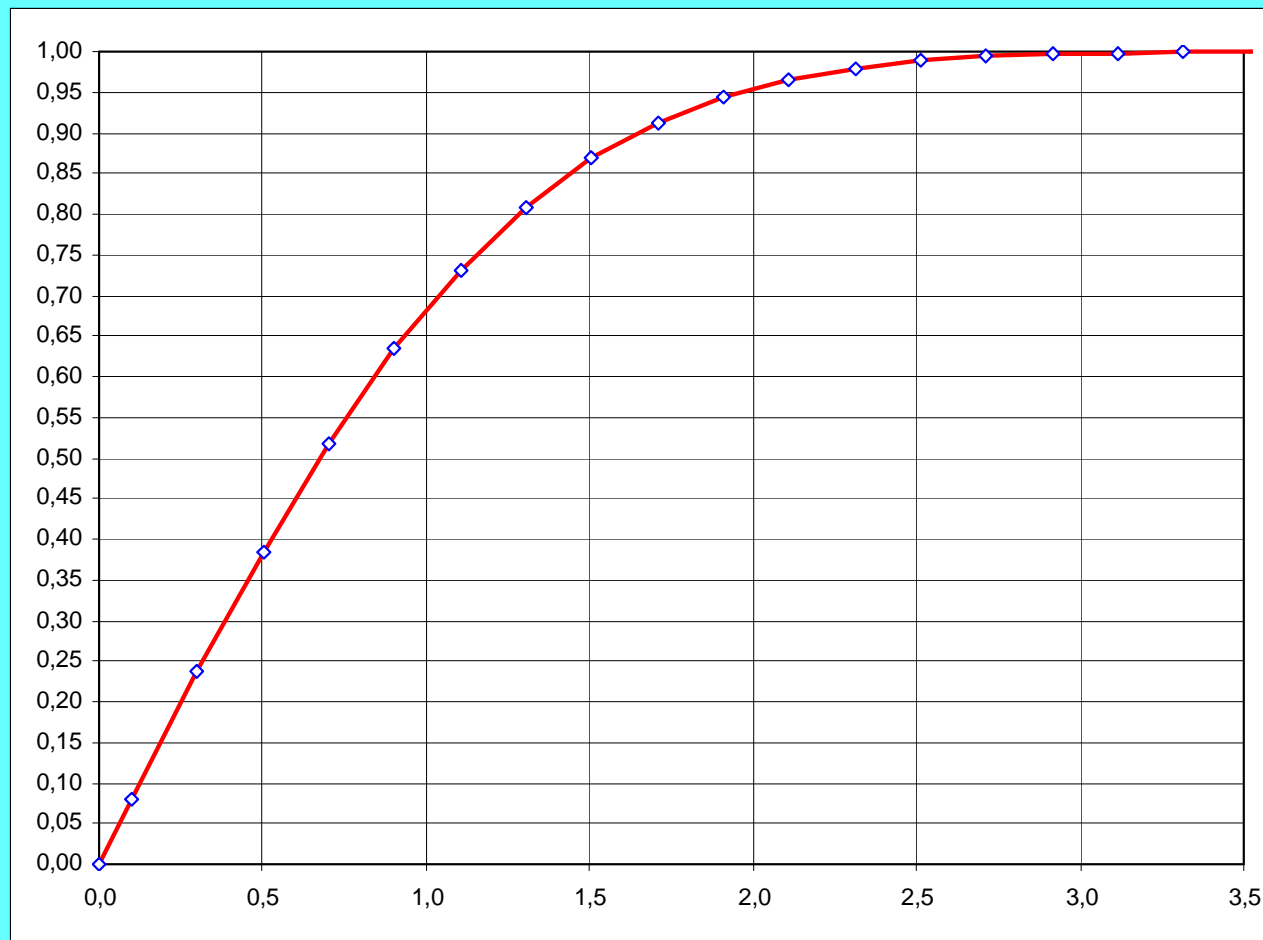
$$P(\mu - 0,67\sigma \leq X \leq \mu + 0,67\sigma) \approx 50\%$$

Quartilsabstand: $1,34\sigma$ - Gesamtlänge einschl. Whiskers: $5,34\sigma$

$$P(\mu - 2,67\sigma \leq X \leq \mu + 2,67\sigma) \approx 99,2\%$$

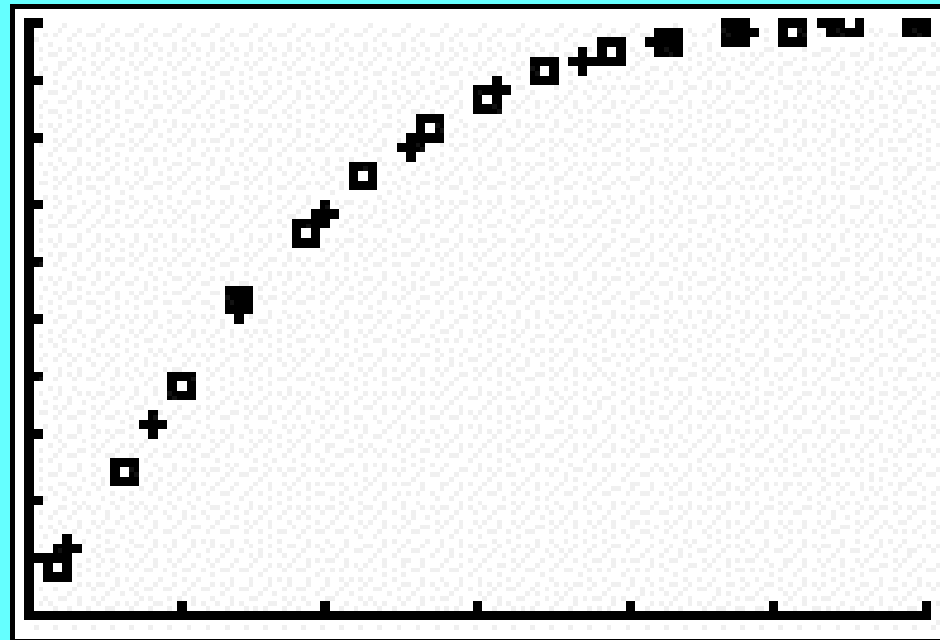


Binomialverteilung: sigma-Regeln



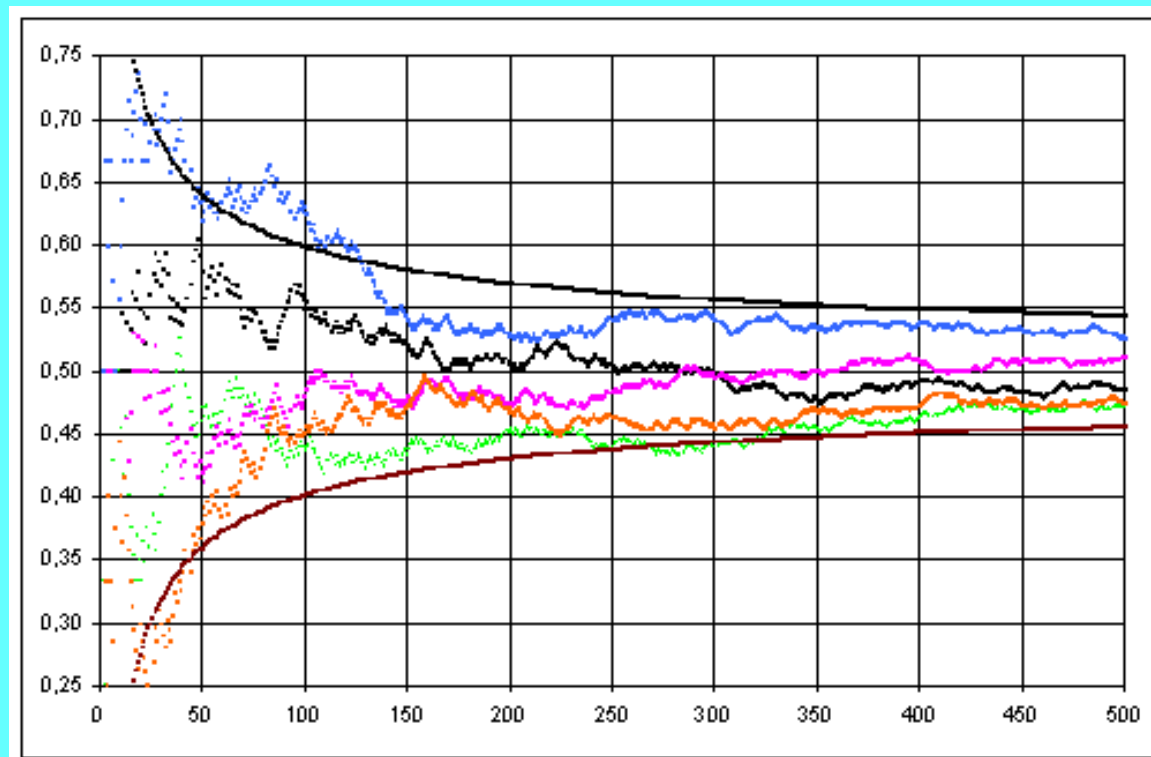
Binomialverteilung: Herleitung der sigma-Regeln

Den funktionalen Zusammenhang kann man mithilfe des GTR sehr gut visualisieren - in der Abb. für verschiedene Parameter.



Binomialverteilung: Bedeutung der sigma-Regeln

Die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten kann auch als Wahrscheinlichkeitsaussage formuliert werden.



Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe

Bekannt ist der Anteil in der Gesamtheit (d. h. die Erfolgswahrscheinlichkeit) - es soll eine Prognose gemacht werden, welche Ergebnisse in der Stichprobe (d. h. bei wiederholter Durchführung des Zufallsversuchs) auftreten werden.

Beispiel 1: 500facher Münzwurf

Eine Münze wird 500-mal geworfen. Wie oft tritt Wappen auf?

Wir erwarten, dass bei ca. $\mu = 500 \cdot 0,5 = 250$ der Zufallsversuche Wappen auftritt (Punktschätzung).

In 90% der Versuchsdurchführungen (d.h. der 500fachen Münzwürfe) wird das Ergebnis im Intervall zwischen $\mu - 1,64\sigma$ und $\mu + 1,64\sigma$ liegen,

Also mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% im Intervall zwischen $\mu - 1,96\sigma$ und $\mu + 1,96\sigma$,

d. h. im Intervall [232 ; 268] bzw. [228 ; 272] liegen

Dies ist eine Intervallschätzung für die Stichprobe vom Umfang 500.

Beispiel 2: Wahlbeteiligung

Bei der Bundestagswahl 2005 betrug die Wahlbeteiligung 77,7%. Welches Ergebnis hätte man am Tag nach der Wahl in einer Zufallsstichprobe vom Umfang 1000 unter den Wahlberechtigten erwarten können?

Bei ungefähr $\mu = 1000 \cdot 0,777 = 777$ der ausgewählten Personen handelt es sich um eine Wählerin oder einen Wähler (Punktschätzung).

In 95% der Versuchsdurchführungen (Stichproben vom Umfang 1000) wird das Ergebnis im Intervall zwischen $\mu - 1,96\sigma$ und $\mu + 1,96\sigma$ liegen, also im Intervall [752 ; 802].

Dies ist eine Intervallschätzung für die Stichprobe - mit absoluten Häufigkeiten.

Beispiel 3: Stimmanteile

Bei der Bundestagswahl 2005 erreichte die CDU/CSU 35,2% der gültigen Zweitstimmen. Welche Stimmanteile für diese Partei hätte man am Tag nach der Wahl in einer Zufallsstichprobe vom Umfang 800 unter den Teilnehmern der Wahl erhalten können?

Wir hätten erwarten können, dass auch in der Stichprobe der Anteil der CDU/CSU-Wähler 0,352 ist (Punktschätzung).

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% wird der Anteil in der Stichprobe im Intervall zwischen $p - 1,96\sigma/n$ und $p + 1,96\sigma/n$, also im Intervall [31,9% ; 38,5%] liegen.

Dies ist eine Intervallschätzung für die Stichprobe - mit relativen Häufigkeiten.

Beispiel 4: Intervallbestimmung mit GTR

Wir betrachten das 1200-fache Werfen eines regulären Hexaeders (Würfel, d. h. $p = 1/6$ für Augenzahl 1). Wir erwarten, dass bei ca. $\mu = 200$ der Zufallsversuche die Augenzahl 1 auftritt (Punktschätzung).

Die sigma-Regeln ermöglichen eine ungefähre (aber ziemlich genaue) Schätzung des gesuchten Intervalls.

Beispiel: $\mu - 1,96\sigma = 178,8$ und $\mu + 1,96\sigma = 221,2$

Kontrollrechnung mit dem GTR: $P(179 \leq X \leq 221)$

$$= \text{binomcdf}(1200, 1/6, 221) - \text{binomcdf}(1200, 1/6, 178) = 0,904$$

$$P(180 \leq X \leq 220) = 0,888 \quad P(178 \leq X \leq 222) = 0,919$$

Fazit: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% wird man beim 1200fachen Würfeln mind. 179, höchstens 221 Würfe mit Augenzahl 1 haben.

Ziel 3:

Testen von Hypothesen

Voraussetzung (nicht unbedingt, aber sehr günstig):

Schluss von der Gesamtheit auf die
Stichprobe

Testen von Hypothesen

Man hat eine Hypothese über den Anteil in der Gesamtheit (d. h. die Erfolgswahrscheinlichkeit)

- man bestimmt einen Bereich, in dem das Ergebnis der Stichprobe (d. h. bei wiederholter Durchführung des Zufallsversuchs) liegen darf.

Wenn dies nicht der Fall ist, will man die Hypothese verwerfen.

Beispiel 1: 500facher Münzwurf

Wir betrachten den 500fachen Münzwurf; die Hypothese ist:
 $p = 0,5$ für Wappen (d.h. die Münze ist eine LAPLACE-Münze).

Wir erwarten, dass bei ca. $\mu = 250$ der Zufallsversuche Wappen auftritt (Punktschätzung).

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% wird die Anzahl der Wappen im Intervall zwischen $\mu - 1,96\sigma$ und $\mu + 1,96\sigma$ liegen, also im Intervall [228 ; 272], dem sogenannten Annahmebereich.

Wenn dies nicht der Fall ist, bezweifeln wir den Ansatz (nämlich, dass es sich um eine LAPLACE-Münze handelt).

Beispiel 1: 500facher Münzwurf

Wir befolgen damit die Entscheidungsregel:

Verwirf die Hypothese $p = 0,5$, falls das Ergebnis im sogenannten Verwerfungsbereich der Hypothese liegt, d. h. wenn weniger als 228- oder mehr als 272-mal Wappen fällt.

Wenn wir so (d. h. nach diesem Schema) verfahren, dann kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 5% vor, dass eine LAPLACE-Münze irrtümlich für eine Nicht-LAPLACE-Münze gehalten wird, denn mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 5% kommt es zufällig zu Ergebnissen des Zufallsversuchs, die außerhalb des angegebenen Intervalls liegen, obwohl $p = 0,5$ wahr ist. Ein solcher Fehler wird als Fehler 1. Art bezeichnet.

Beispiel 1: 500facher Münzwurf

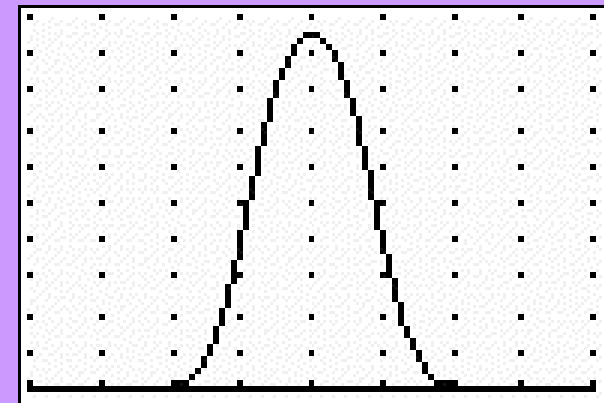
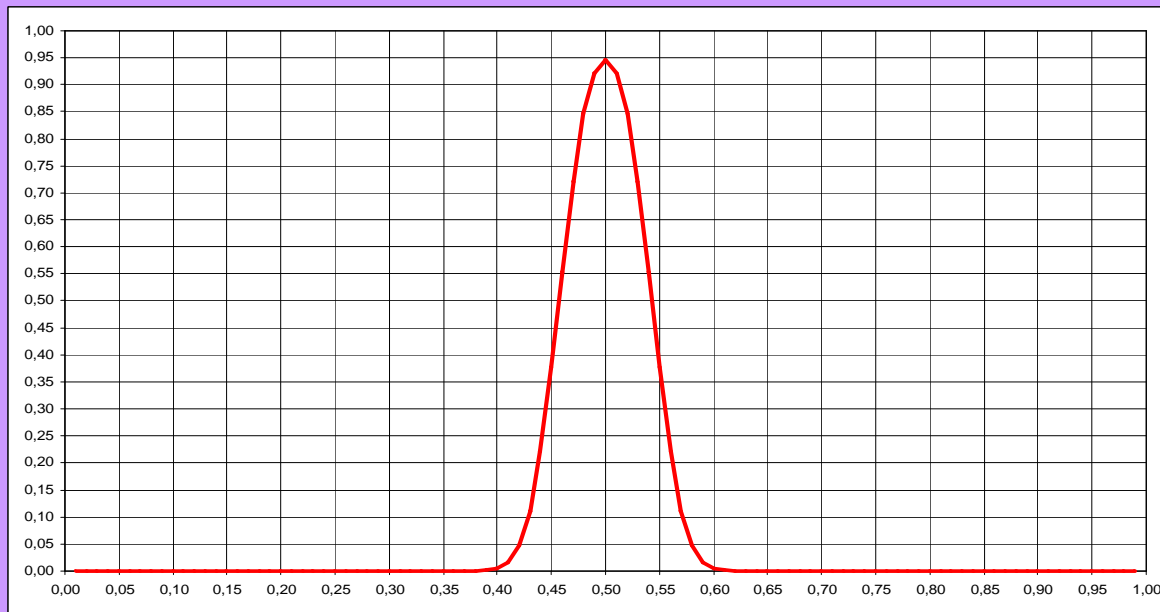
Falls es sich um eine Nicht-LAPLACE-Münze handelt, bei der beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für Wappen gleich $p = 0,45$ ist, dann könnte es trotzdem vorkommen, dass dies nicht erkannt wird (nämlich dann, wenn das Ergebnis im Annahmereich der Hypothese liegt).

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solcher Fehler 2. Art eintritt, berechnet sich für $p = 0,45$ wie folgt:

$$\begin{aligned} & P_{p=0,45} (228 \leq X \leq 272) \\ & = \text{binomcdf}(500,0.45,272) - \text{binomcdf}(500,0.45,227) \\ & \approx 0,411 \end{aligned}$$

Beispiel 1: 500facher Münzwurf

Die Funktion, die jedem möglichen Wert von p die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art zuordnet, heißt **Operationscharakteristik**.



Beispiel 2: Medikamenten-Überprüfung

Ein Arzneimittelhersteller behauptet, dass ein neues Medikament gegen eine bestimmte Krankheit bei (mindestens) 60% der Patienten hilft. Man will diese Angabe des Herstellers akzeptieren, wenn von 20 zufällig ausgewählten Patienten mindestens 11 nach Anwendung des Medikaments geheilt werden.

Die Entscheidungsregel und damit der Annahmebereich der Hypothese $p = 0,6$ ist vorgegeben und auf das Intervall $[11 ; 20]$ festgelegt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenergebnis zufällig in diesem Intervall liegt, wenn tatsächlich die Heilungschance des Medikaments $p = 0,6$ beträgt, ist:

$$P(11 \leq X \leq 20) = \text{binomcdf}(20,0.6,20) - \text{binomcdf}(20,0.6,10) \approx 0,755$$

Beispiel 2: Medikamenten-Überprüfung

Wenn wir so verfahren, würde mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 24,5% ein Fehler 1. Art eintreten,

denn das Ergebnis könnte mit einer Wahrscheinlichkeit von 24,5% im Intervall $[0 ; 10]$ - das ist der Verwerfungsbereich der Hypothese - liegen, wenn $p = 0,6$ ist.

Wenn die Heilungswahrscheinlichkeit durch das neue Medikament in Wirklichkeit nur 50% beträgt, käme es mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 41,2% zu 11 oder mehr Heilungen.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist dann gleich 41,2%.

$$P_{p=0,5}(11 \leq X \leq 20) = \text{binomcdf}(20,0.5,20) - \text{binomcdf}(20,0.5,10) \approx 0,412$$

Einführung in die Beurteilende Statistik, Schroedel,
Neuausgabe 2008, ISBN: 978 - 3 - 507 - 83214 - 5

(„Stochastik kompakt“)

Elemente der Mathematik: Mathematik mit neuen Technologien,
Schroedel, 2006,
ISBN: 978 - 3 - 507 - 83990 - 8)

(enthält gesamte Oberstufenmathematik mit Unterstützung des GTR (TI 84+))

Elemente der Mathematik: Leistungskurs Stochastik, Schroedel,
2003, ISBN: 978 - 3 - 507 - 83938 - 0

(enthält alle Themen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, die auf
Schulniveau behandelt werden können)

Elemente der Mathematik: Band 11 Nordrhein-Westfalen,
Schroedel, 2004, ISBN: 978 - 3 - 507 - 83928 - 1

(enthält außer der Einführung in die Differentialrechnung wichtige Aspekte der
Beschreibenden Statistik einschl. Boxplots, Regressions- und Korrelationsrechnung)